Esercizi

1) Considerare le sequenze $\{A(n)\}$ e $\{B(n)\}$ definite da:

$$A(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 3A\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)+n-1 & n>1\end{cases}$$

e

$$B(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 2B\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)+n-\sqrt{n} & n>1\end{cases}$$

Calcolare il valore di $A(n)$ e $B(n)$ per ogni intero n potenza di 2 e determinarne l'ordine di grandezza al crescere di n.

2) Siano $m,a\in\mathbb{R}^+$ con $a>1$. Definiamo $C(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ mediante l'equazione:

$$C(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ mC\left(\frac{x}{a}\right)+x^2-x & x>1\end{cases}$$

Determinare, al variare di a ed m, l'ordine di grandezza di $C(x)$ per $x\to+\infty$.

3) Sia $\{D(n)\}$ una sequenza di interi definita dall'equazione:

$$D(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 2D\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)+n\lg n & n>1\end{cases}$$

Determinare, l'ordine di grandezza di $D(n)$ per $n\to\infty$.

§.16 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Un'altra famiglia di equazioni ricorrenti che compaiono sovente nell'analisi degli algoritmi è quella delle equazioni lineari a coefficienti costanti. Queste sono definite da uguaglianze della forma

(47) $$a_0t_n+a_1t_{n-1}+\cdots+a_kt_{n-k}=g_n$$

dove $\{t_n\}$ è la sequenza incognita, $k,a_0,\ldots,a_k$ sono costanti e $\{g_n\}$ è una qualunque sequenza di numeri. Una sequenza di numeri $\{t_n\}$ si dice soluzione dell'equazione se la (47) è soddisfatta per ogni $n\ge k$. Chiaramente le varie soluzioni si differenziano per il valore dei primi k termini.

Un'equazione di questo tipo si dice omogenea se $g_n=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$. In questo caso esiste una nota regola generale che permette di ottenere esplicitamente tutte le soluzioni dell'equazione. Inoltre, anche nel caso non omogeneo, per le sequenze $\{g_n\}$ più comuni, è possibile definire un metodo per calcolare la famiglia delle soluzioni.

§.17 Equazioni omogenee

Per illustrare la regola di soluzione nel caso omogeneo consideriamo un esempio specifico dato dalla seguente equazione:

(48) $$t_n - 7t_{n-1} + 10t_{n-2} = 0$$

Cerchiamo innanzitutto soluzioni della forma $t_n = r^n$ per qualche costante $r > 0$.

Sostituendo tali valori otteniamo $r^{n-2}(r^2 - 7r + 10) = 0$ da cui ricaviamo l'equazione caratteristica della ricorrenza

(49) $$r^2 - 7r + 10 = 0$$

che ammette $r_1 = 2, r_2 = 5$ come soluzioni.

Ne segue che le sequenze $\{c_n\} = \{l\,5^n + m2^n\}$ sono soluzioni di (48) $\forall\, l, m$. Anzi (ma non lo dimostriamo) sono tutte e sole le soluzioni non banali di (48).

Come abbiamo visto, le soluzioni dell'equazione ricorsiva considerata sono ottenute mediante le radici dell'equazione caratteristica associata. Se le radici sono tutte distinte questa proprietà è del tutto generale e può essere estesa a ogni equazione ricorsiva lineare omogenea a coefficienti costanti, cioè ad ogni equazione della forma

(50) $$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

dove $k \le n$ e gli a_j sono costanti. Chiaramente, l'equazione caratteristica associata è

(51) $$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

Un teorema afferma che, se l'equazione caratteristica associata ammette k radici distinte $r_1, \ldots, r_k$, allora le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole le sequenze $\{t_n\}$ tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

(52) $$t_n = l_1 r_1^n + \cdots + l_k r_k^n$$

dove $l_1, \ldots, l_k$ sono costanti arbitrarie.

Il teorema può essere dimostrato applicando lo stesso ragionamento presentato nell'esempio precedente. Si mostra innanzitutto che l'insieme delle soluzioni dell'equazione forma uno spazio vettoriale di dimensione k e poi si prova che le k soluzioni sono linearmente indipendenti e formano quindi una base dello spazio stesso.

Esempio Numeri di Fibonacci
Consideriamo la sequenza $\{f_n\}$ dei numeri di Fibonacci, definita dall'equazione:

(53) $$f_n = \begin{cases} n & n = 0,1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

La corrispondente equazione caratteristica è $x^2 - x - 1 = 0$ che ammette due soluzioni reali e distinte:

(54) $$f = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \bar{f} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Allora ogni soluzione $\{c_n\}$ dell'equazione considerata è della forma $c_n = l f^n + m\bar{f}^n$ con l e m costanti. Imponendo le condizioni iniziali $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$ otteniamo il sistema

(55) $$\begin{cases} l + m = 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} l + \frac{1-\sqrt{5}}{2} m = 1 \end{cases}$$

che fornisce le soluzioni $l = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $m = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ricaviamo:

(56) $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Esempio
Vogliamo calcolare ora la sequenza $\{g_n\}$ definita dalla seguente equazione:

(57) $$g_n = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq 2 \\ 3g_{n-1} + 4g_{n-2} - 12g_{n-3} & n \geq 3 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica della ricorrenza è $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ che ammette come radici i valori $3, 2, -2$. Ne segue che la soluzione è della forma $g_n = l\, 3^n + m(-2)^n + n\, 2^n$.
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema

(58) $$\begin{cases} l + m + n = 0 \\ 3l - 2m + 2n = 1 \\ 9l + 4m + 4n = 2 \end{cases}$$

che fornisce la soluzione $l = \frac{2}{5}, m = -\frac{3}{20}, n = -\frac{1}{4}$.
Quindi la sequenza cercata è data dai valori:

(59) $$g_n = \frac{2}{5}3^n - \frac{3}{20}(-2)^n - \frac{1}{4}2^n.$$

Finora abbiamo considerato solo ricorrenze la cui equazione caratteristica ammette radici semplici. La situazione è solo leggermente più complicata quando compaiono radici multiple.

Infatti sappiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (50) forma uno spazio vettoriale di dimensione k e quindi l'unico problema è quello di determinare k soluzioni linearmente indipendenti.
Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, presenta la soluzione generale.

Data l'equazione di ricorrenza:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

supponiamo che la corrispondente equazione caratteristica abbia $h \le k$ radici distinte $r_1, \ldots, r_h$ ognuna con molteplicità m_i. Allora le soluzioni dell'equazione di ricorrenza data sono tutte e sole le combinazioni lineari delle sequenze:

$$\left\{ n^j r_i^n \right\} \tag{60}$$

dove $j \in \{0, 1, \ldots, m_i - 1\}$ e $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$

Esempio
Vogliamo calcolare la sequenza $\{h_n\}$ definita da

$$h_n = \begin{cases} 0 & n = 0,1 \\ 1 & n = 2 \\ 7h_{n-1} - 15h_{n-2} + 9h_{n-3} & n \ge 3 \end{cases}$$

In questo caso, l'equazione caratteristica $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$ ammette la radice semplice $x = 1$ e la radice $x = 3$ con molteplicità 2.
Allora la soluzione è della forma $h_n = (l\,n + m)3^n + n$. Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} l + n = 0 \\ 3l + 3m + n = 0 \\ 18l + 9m + n = 1 \end{cases}$$

che fornisce la soluzione $l = \frac{1}{6}, m = -\frac{1}{4}, n = \frac{1}{4}$. Quindi la sequenza cercata è data da:

$$h_n = \left(\frac{1}{6} n - \frac{1}{4} \right) 3^n + \frac{1}{4}$$

§.18 Equazioni non omogenee

Consideriamo ora un'equazione di ricorrenza lineare non omogenea a coefficienti costanti, cioè una relazione della forma

(61) $$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = g_n$$

dove ancora $\{t_n\}$ è la sequenza incognita, $k \le n$, gli a_j sono costanti e inoltre $\{g_n\}$ è una qualunque sequenza non identicamente nulla.

Se $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ sono due soluzioni della (61) allora

$$a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \cdots + a_k u_{n-k} = g_n$$
$$a_0 v_n + a_1 v_{n-1} + \cdots + a_k v_{n-k} = g_n$$

da cui ricaviamo che la sequenza $\{u_n - v_n\}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

E' facile da qui dedurre quindi che, nota una soluzione particolare della (61), tutte e sole le soluzioni si ottengono sommando tale soluzione particolare a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Questo significa che per risolvere la (61) possiamo eseguire i seguenti passi:
1. trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata applicando il metodo dell'equazione caratteristica descritto nella sezione precedente;
2. determinare una soluzione particolare dell'equazione data e sommarla alle precedenti.

Il problema è che non esiste un metodo generale per determinare una soluzione particolare di un'equazione non omogenea ma esistono solo tecniche specifiche che dipendono dal valore del termine noto g_n.

In alcuni casi tuttavia la determinazione della soluzione particolare è del tutto semplice.

Esempio g_n costante

Vogliamo determinare le soluzioni dell'equazione $t_n - 2t_{n-1} = -3$.

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $x - 2 = 0$ e quindi la sua soluzione generale è $\{l\,2^n\}$ con l costante arbitraria. Inoltre è facile verificare che $u_n = 3 \ \forall n$ è una soluzione dell'equazione iniziale. Quindi le soluzioni sono tutte e sole le sequenze della forma $\{3 + l\,2^n\}$ con l costante.

Esempio Algoritmo di Fibonacci

Ora abbiamo finalmente tutti gli strumenti per verificare che i tempi di elaborazione dell'algoritmo Fib(n) visto nel paragrafo §17.

Si trattava di dimostrare che $T(n)$ del sistema (38) cresce esponenzialmente in n.

Consideriamo quindi l'equazione ricorrente

(62) $$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = c$$

la cui omogenea associata

(63) $$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$

abbiamo visto ammettere soluzione

(64) $$t_n = l f^n - m \bar{f}^n$$

E poichè $t_n = -c$ è banalmente una soluzione particolare di (62) ricaviamo immediatamente la sua soluzione generale $t_n = l f^n - m\bar{f}^n - c$ che, con le condizioni iniziali date dal problema, ci porta a concludere che $T(n) = \Theta\left(f^n - \bar{f}^n\right) + \Theta(1)$ ovvero $T(n) = \Theta\left(f^n - \bar{f}^n\right)$ e poichè $f^n - \bar{f}^n = f^n\left(1 - \frac{\bar{f}^n}{f^n}\right)$ ricaviamo infine che

(65) $$T(n) = \Theta\left(f^n\right) = \Theta\left(2^{cn}\right)$$

dove $c = \lg f$.