**Esercizio 1**

Le due variabili aleatorie X ed Y hanno densità congiunta data dalla seguente tabella:

| | **Y = -2** | **Y = 1** | **Y = 3** |
|---|---|---|---|
| X = -2 | 0.1 | 0.1 | 0.05 |
| X = 4 | 0.2 | 0.5 | 0.05 |

Calcolare le densità marginali di X e Y, la Covarianza tra X e Y. Le due variabili sono indipendenti? Trovare inoltre la media di Y condizionata a X = -2.

**Soluzione**

La tabella con anche le densità marginali di X e Y è:

| | **Y = -2** | **Y = 1** | **Y = 3** | |
|---|---|---|---|---|
| **X = -2** | 0.1 | 0.1 | 0.05 | 0.25 |
| **X = 4** | 0.2 | 0.5 | 0.05 | 0.75 |
| | 0.3 | 0.6 | 0.1 | |

Dalla tabella si ricava che E[XY] = 0.66, mentre E[X] = 2.5 e E[Y] = 0.3 e quindi la Covarianza tra X e Y è pari a -1.59. Le variabili X e Y non sono indipendenti.
La E[Y| X = -2] = -2 *(0.1/0.25) + 1*(0.1/0.25) + 3*(0.05/0.25) = 0.2

**Esercizio 2**

La coppia di variabili aleatorie X ed Y ha densità congiunta data da:
$f_{XY}(x,y) = k(x+y)$ per $0 < x < 1$ e $0<y<(1-x)$, e vale zero in tutti gli altri punti del piano.
Determinare la costante k affinché $f_{XY}(x,y)$ sia una densità bivariata. Calcolare quindi la P(X+Y < 1/2).

**Soluzione**

Deve essere

$$\int_0^1 dx \int_0^{(1-x)} dy k(x+y) = k\int_0^1 dx\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right] = k\,\frac{2}{3}$$

da cui k = 3/2

Per calcolare P(X+Y < 1/2) si ha:

$$P\left(X+Y<\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{(\frac{1}{2}-x)} dy(x+y) = \frac{1}{16}$$

**Esercizio 3**

Si considerino due variabili aleatorie X e Y indipendenti aventi rispettivamente legge esponenziale di parametro $\lambda$ ed esponenziale di parametro $\mu$.
Si trovi la legge di Z = Min(X,Y) e quella di W = Max(X,Y).

**Soluzione**
Si ha per z positivo,

$P(Z > z) = P(Min(X,Y) > z) = P(X > z\, ,\ Y > z) = P(X > z)\ P(Y > z) = e^{(-\lambda z)}\ e^{(-\mu z)} = e^{\,(-(\lambda+\mu)\ z)}$

da cui si riconsce che Z ha legge esponenziale di parametro ($\lambda + \mu$).

$$F_W(t) = P(Max(X,Y) \le t) = P(X \le t, Y \le t) = P(X \le t)P(Y \le t) = (1 - e^{-lt})(1 - e^{-mt})$$

per t positivo.
Derivando  la funzione di ripartizione otteniamo la densità della variabile aleatoria W:

$$f_W(t) = me^{-mt} + l\,e^{-lt} - (l + m)e^{-(l+m)t}$$

**Esercizio 4**

Si supponga che il numero di clienti N che entra in un negozio sia distribuito con legge di Poisson di paramentro $\lambda$. Ogni cliente che entra esce avendo acquistato qualcosa con probabilità p, in modo indipendente dagli altri clienti e dal numero di persone presenti nel negozio.
Determinare come si distribuisce la legge della variabile aleatoria A che conta i clienti che entrano nel negozio e fanno acquisti.

**Soluzione**

Condizionatamente al fatto che nel negozio entrino n clienti, e sapendo che ognuno acquista in modo indipendente dall'altro con probabilità p possiamo dire che il numero di clienti che fanno acquisti su questi n è distribuito come una v.a. binomiale di parametri n e p, vale a dire:

$$P(A=k \mid N=n)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{(n-k)}$$

con k = 0,…,n

Ora per determinare la legge di A, posso dire che

$$P(A=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(A=k \mid N=n) P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} \frac{e^{-l}\, l^{\,n}}{n!} =$$

$$= \frac{e^{-l}\, p^k\, l^{\,k}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{(n-k)}\, l^{\,(n-k)}}{(n-k)!} = \frac{e^{-l}\,(p\,l\,)^k\, e^{l\,(1-p)}}{k!} = \frac{e^{-l\,p}\,(p\,l\,)^k}{k!}$$

per ogni intero k $\lhd$ 0.

Da qui si deduce che A segue una legge di Poisson di parametro λp.