Esercitazioni del 23 0ttobre 2001

Esercizio 1
Un'inchiesta sulla popolazione di una certa città ha fornito i seguenti dati: il 10% della popolazione è ricco, il 5% è famoso e il 3% è ricco e famoso. Per una persona scelta a caso da suddetta popolazione,

(a) qual è la probabilità che la persona non sia ricca?

(b) Qual è la probabilità che sia ricca ma non famosa?

(c) Qual è la probabilità che sia ricca o famosa?

(d) Se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa sia anche ricca?

(e) Se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa non sia ricca?

Soluzione

Poniamo: $F = \{\textit{la persona è famosa}\}$ $F^c = \{\textit{la persona non è famosa}\}$
$R = \{\textit{la persona è ricca}\}$ $R^c = \{\textit{la persona non è ricca}\}$

Allora i dati del problema si traducono in:
$p(R) = 0.10$, $p(F) = 0.05$ e $p(R \cap F) = 0.03$

(a) $\mathbf{p(R^c)} = 1 - p(R) = 1 - 0.10 = \mathbf{0.90}$

(b) $\mathbf{p(R \cap F^c)} = p(R) - p(R \cap F) = 0.10 - 0.03 = \mathbf{0.07}$

(c) $\mathbf{p(R \cup F)} = p(R) + p(F) - p(R \cap F) = 0.10 + 0.05 - 0.03 = \mathbf{0.12}$

(d) $\mathbf{p(R|F)} = \frac{p(R\cap F)}{p(F)} = \frac{0.03}{0.05} = \mathbf{0.60}$

(e) $\mathbf{p(R^c|F)} = p(\Omega|F) - p(R|F) = 1 - 0.60 = \mathbf{0.40}$

Osserviamo che le probabilità totali possono essere inserite in una matrice in cui la somma estesa a tutti i suoi elementi è pari a 1:

	F	F^c	Tot
R	$p(R \cap F)$	$p(R \cap F^c)$	$p(R)$
R^c	$p(R^c \cap F)$	$p(R^c \cap F^c)$	$p(R^c)$
Tot	$p(F)$	$p(F^c)$	$\mathbf{p(\Omega)}$

	F	F^c	Tot
R	0.03	0.07	0.10
R^c	0.02	0.88	0.90
Tot	0.05	0.95	**1.00**

Anche le probabilità condizionate possono essere inserite in una matrice ma, in questo caso, saranno pari a 1 le somme estese alle singole righe (o, equivalentemente, colonne):

	F	F^c	Tot
R	$p(R\|F)$	$p(R\|F^c)$	/
R^c	$p(R^c\|F)$	$p(R^c\|F^c)$	/
Tot	$\mathbf{p(\Omega\|F)}$	$\mathbf{p(\Omega\|F^c)}$	/

	F	F^c	Tot
R	0.60	0.074	/
R^c	0.40	0.926	/
Tot	**1.00**	**1.00**	/

	F	F^c	Tot
R	$p(F\|R)$	$p(F^c\|R)$	$\mathbf{p(\Omega\|R)}$
R^c	$p(F\|R^c)$	$p(F^c\|R^c)$	$\mathbf{p(\Omega\|R^c)}$
Tot	/	/	/

	F	F^c	Tot
R	0.30	0.70	**1.00**
R^c	0.022	0.978	**1.00**
Tot	/	/	/

Esercizio 2
Lo 0.1% della popolazione di una città ha la tubercolosi (TBC). Si costruisce un test con le seguenti caratteristiche: se una persona ha la TBC il test fornisce esito positivo con probabilità 0.999, se invece è sana, comunque il test risulta (erroneamente) positivo con probabilità 0.002. Se un cittadino risulta positivo al test, quale è la probabilità che sia realmente affetto da TBC?

Esercizio 3

In un gioco televisivo viene messo in palio un miliardo di lire. Per vincerlo il concorrente dovrà indovinare fra tre buste quella che contiene la promessa di pagamento. Il concorrente sceglie a caso una busta; a questo punto il conduttore mostra una busta vuota offrendo al concorrente di cambiare la propria busta con quella rimanente. Qual è la probabilità di vincere il premio conservando la prima busta scelta? Qual è la probabilità di vincere cambiando la busta? Qual è la strategia ottimale?

Esercizio 4
Assegnate le probabilità $P(A) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.6$ determinare $P(B)$ nelle seguenti ipotesi alternative:

(a) A e B sono incompatibili

(b) A e B sono indipendenti

(c) $P(A \mid B) = 0.4$.