Ripasso del 16 Novembre 2001

Richiami di teoria

- **Distribuzione di Poisson** di parametro λ: $P_0(\lambda)$. Data una v.a. $X \sim P_0(\lambda)$ essa ha densità $p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, media e varianza $\mathrm{E}X = \mathrm{Var}X = \lambda$. Inoltre, se $X_i \sim P_0(\lambda_i) \Rightarrow X_1 + \cdots + X_n \ \sim \ P_0(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.
  Il parametro λ può essere interpretato come il numero medio di eventi in un intervallo temporale $[0, t]$ e, quindi, il parametro risulta proporzionale all'ampiezza t dell'intervallo. Da qui $\lambda = \nu t$ dove $\nu = \lambda/t$ viene detta *intensità* del processo di Poisson. Se $X_t = \{\text{numero di eventi in } [0, t]\}$ allora:
  - $X_t \sim P_0(\nu t)$
  - $P(X_t = k) = p_{X_t}(k) = e^{-\nu t}\frac{(\nu t)^k}{k!}$
  - $P(X_t \leq k) = \sum_{i=0}^{k} p_{X_t}(i)$
- Sia X un processo di Poisson di intensità ν. Si dice **v.a. esponenziale** di parametro ν e si denota con $Y \sim Esp(\nu)$ la v.a. Y che misura l'istante del primo evento nel processo di Poisson.
  - $P(Y = t) = f_Y(t) = \nu e^{-\nu t}$ per $t > 0$ e $f_Y(t) = 0$ altrove
  - $P(Y \leq t) = F_Y(t) = 1 - e^{-\nu t}$ per $t > 0$ e $F_Y(t) = 0$ altrove
  - $\mathrm{E}Y = 1/\nu$; $\mathrm{Var}Y = 1/\nu^2$
  - $P(Y > t) = P(X_t = 0) = e^{-\nu t}$

  Poiché la poissoniana e l'esponenziale dipendono unicamente dall'ampiezza t dell'intervallo $[T, T+t]$ si dice anche che l'esponenziale Y misura il tempo di attesa tra due eventi successivi. Il valor medio, cioè $1/\nu$ viene anche detto *tempo medio tra due eventi.* Notare l'analogia dell'intensità del processo di Poisson con la frequenza di un'oscillazione, del valor medio con il periodo, e del parametro della Poissoniana con la lunghezza d'onda.

Esercizio 1
Un componente elettronico è soggetto a guasti casuali che seguono un processo di Poisson. In 10 settimane mediamente si verifica un guasto. Si determinino:

1. il tempo di attesa medio tra due guasti
2. il numero medio di guasti in un anno

   Si calcolino, inoltre, le probabilità che:

3. non ci siano guasti per un anno
4. non ci sia più di un guasto in 20 settimane

Soluzione Cominciamo col definire l'unità di tempo in funzione delle richieste dettate dal problema: $[t] = 1$ settimana. Quindi l'intensità del processo di Poisson in esame è: $\nu = \lambda/t = 1/10 = 0.1$ guasti a settimana. Chiamiamo $X_t \sim P(0.1\,t)$ la v.a. che conta i guasti che si verificano nell'intervallo t.

1. il tempo di attesa medio tra due guasti è: $1/\nu = 10$ settimane.
2. il numero medio di guasti in un anno (1 anno = 52 settimane) è:

$$\mathrm{E}X_{t=52} = \nu t = 0.1 \cdot 52 = 5.2$$

3. La probabilità che non ci siano guasti per un anno è data da:

$$P(X_{52} = 0) = e^{-\nu t} = e^{-5.2} \simeq 0.0055$$

4. La probabilità che non ci sia più di un guasto in 20 settimane è data da:

$$P(X_{20} \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} e^{-2}\frac{2^k}{k!} = 3e^{-2} \simeq 0.406$$

Esercizio 2
Le sfere d'acciaio prodotte da una fabbrica hanno un diametro che segue la distribuzione normale. Si supponga che il 20% delle sfere abbia un diametro inferiore a 1.2 cm. e che il 10% abbia un diametro maggiore di 1.4 cm.:

1. si determini il valore atteso del diametro di una sfera
2. si dia una misura dell'inaccuratezza del processo (varianza)
3. sulla base dei risultati precedenti si determini la probabilità che il diametro di una sfera sia maggiore di 1.5 cm.

Soluzione Chiamiamo X la v.a. aleatoria che misura il diametro delle sfere. Sappiamo che $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con media e varianza incognite. Chiamiamo $Y = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ la sua standardizzata. Per ricavare μ e σ partiamo dalle informazioni fornite dal problema:

$$P(X < 1.2) = P(X \leq 1.2) = 0.2 \qquad P(X > 1.4) = 1 - P(X \leq 1.4) = 0.1$$

$$P(Y \leq \frac{1.2 - \mu}{\sigma}) = 0.2 \qquad P(Y \leq \frac{1.4 - \mu}{\sigma}) = 0.9$$

E poiché $Y \sim N(0, 1)$ possiamo ricavare dalle tabelle i quantili z_α ottenendo due equazioni lineari nelle due incognite μ e σ:

$$\frac{1.2 - \mu}{\sigma} = z_{0.2} = -z_{0.8} = -0.84 \qquad \frac{1.4 - \mu}{\sigma} = z_{0.9} = 1.28$$

$$\frac{1.2 - \mu}{-0.84} = \frac{1.4 - \mu}{1.28} \qquad 1.4 - 1.2 = (1.28 + 0.84) \cdot \sigma$$

$$\mu = 1.28 \qquad \sigma = 0.09$$

Infine calcoliamo $P(X > 1.5) = 1 - P(X \leq 1.5)$ cercando sulle tabelle il valore della standardizzata:

$$1 - P(X \leq 1.5) \simeq 1 - P\left(Y \leq \frac{1.5 - 1.28}{0.09}\right) \simeq 1 - P(Y \leq 2.44) \simeq 1 - 0.993 = 0.007$$

Esercizio 3
Nella famiglia Esponenziale le liti terminano solo quando un coniuge dà ragione all'altro. Il marito ha torto il 60% delle volte. La moglie dà ragione al marito il 25% delle volte in cui lui ha torto ed il 50% delle volte in cui lui ha ragione. I coniugi Esponenziale hanno appena litigato. Si determinino le probabilità che:

1. la moglie dia ragione al marito
2. lui abbia torto, se lei gli dà ragione
3. lui abbia ragione, se lei gli dà torto

Soluzione Diamo nome agli eventi: MA_R = il marito ha ragione; MA_T = il marito ha torto; MO_R = la moglie gli dà ragione; MO_T = la moglie gli dà torto. Quindi i dati del problema si scrivono:

$$P(MA_T) = 0.6 \qquad P(MO_R|MA_T) = 0.25 \qquad P(MO_T|MA_R) = 0.5$$

Da questi ricaviamo subito:

$$P(MA_R) = 0.4 \qquad P(MO_T|MA_T) = 0.75 \qquad P(MO_R|MA_R) = 0.5$$

Al solito costruiamo le tre matrici delle probabilità totali e condizionate che compiliamo con i dati già noti (dal problema o da semplici calcoli). Gli elementi indicati con x_i sono i valori da trovare relativi all'i-esima domanda.

$\cap$	MO_T	MO_R	Tot
MA_T			0.6
MA_R			0.4
Tot		$\mathbf{x_1}$	1

$MO\|MA$	MO_T	MO_R
MA_T	0.75	0.25
MA_R	0.5	0.5

$MA\|MO$	MO_T	MO_R
MA_T		$\mathbf{x_2}$
MA_R	$\mathbf{x_3}$	

Ora calcoliamo $P(MO_R \cap MA_T) = P(MO_R|MA_T)P(MA_T) = 0.25 \cdot 0.6 = 0.15$ e $P(MO_R \cap MA_R) = P(MO_R|MA_R)P(MA_R) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$ Ora possiamo ricavare x_1 e prepararci a calcolare x_2 e x_3.

$\cap$	MO_T	MO_R	Tot
MA_T	0.45	0.15	0.6
MA_R	0.2	0.2	0.4
Tot	0.65	**0.35**	1

$MO\|MA$	MO_T	MO_R
MA_T	0.75	0.25
MA_R	0.5	0.5

$MA\|MO$	MO_T	MO_R
MA_T		$\mathbf{x_2}$
MA_R	$\mathbf{x_3}$	

$$x_2 = P(MA_T|MO_R) = \frac{P(MA_T \cap MO_R)}{P(MO_R)} = \frac{0.15}{0.35} \simeq 0.43$$

$$x_3 = P(MA_R|MO_T) = \frac{P(MA_R \cap MO_T)}{P(MO_T)} = \frac{0.2}{0.65} \simeq 0.31$$