Esercitazioni del 13 Novembre 2001

Richiami di teoria

- Una v.a. *continua* X è definita assegnando una funzione $f_X \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, detta **densità** della v.a. X, con le seguenti proprietà:

$$f_X \geq 0 \quad \forall t \,\epsilon\, \mathbb{R} \qquad\qquad \int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt \;=\; 1$$

- La densità f_X determina la legge della v.a. X nel seguente modo:

$$P(X \,\epsilon\, I) \;\equiv\; \int_I f_X(t)dt \qquad \forall I \,\subseteq\, \mathbb{R}$$

- Si chiama **funzione di ripartizione** di X la funzione $F_X \;:\; \mathbb{R} \to [0,1]$, definita da:

$$F_X(t) \;=\; P(X \;\leq\; t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_X(y)dy \qquad \forall t \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

- Vale la proprietà che per ogni a, $b \,\epsilon\, \mathbb{R}$ con $a < b$:

$$F_X(b) \,-\, F_X(a) \;=\; P(X \leq b) \,-\, P(X \leq a) \;=\; P(a < X \leq b)$$

- Sia X una v.a. continua tale che la sua f.d.r. sia biunivoca tra $(a,\, b)$ e $(0,\, 1)$. Allora $\forall \alpha \,\epsilon\, (0,\, 1)$ si chiama **quantile** α**-esimo** della legge X il numero $q_0 \,\epsilon\, (a,\, b)$ tale che:

$$P(X \leq q_0) \;=\; \alpha$$

- Si dice **valore atteso** di una v.a. continua X, il numero:

$$\mathrm{E}X \;=\; \int_{\mathbb{R}} t\, f_X(t)dt$$

  purché l'integrale esista finito.

- Per ogni funzione continua $g \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\mathrm{E}g(X) \;=\; \int_{\mathbb{R}} g(t)\, f_X(t)dt$$

  purché l'integrale esista finito.

- Si dice **varianza** di una v.a. continua X, il numero:

$$\mathrm{Var}X \;=\; \mathrm{E}(X^2) \,-\, (\mathrm{E}X)^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}} t^2\, f_X(t)dt \,-\, \left(\int_{\mathbb{R}} t\, f_X(t)dt\right)^2$$

- **Legge dei grandi numeri**: date n v.a. X_i i. i. d. per le quali $\mathrm{E}X_i = \mu$ e $\mathrm{Var}X_i = \sigma^2$, la v.a. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ viene detta **media campionaria**. Questa ha valore atteso $\mathrm{E}(\overline{X}_n) = \mu$ e varianza $\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.
- **Disuguaglianza di Chebyshev**: sia X una v.a. tale che $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Sia δ un numero reale positivo prefissato. Allora:

  $$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

  La disuguaglianza può essere scritta nelle seguenti forme alternative:

  $$P(|X-\mu| \geq \delta\sigma) \leq \frac{1}{\delta^2} \quad , \quad P(|X-\mu| < \delta\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}$$

- Sia $Z \sim N(0,1)$. Allora la v.a. $X = \sigma Z + \mu$ è anch'essa gaussiana di media μ e varianza σ^2 e la sua f.d.r. è $F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

Esercizio 1
Si verifichi se le seguenti funzioni f sono funzioni di densità di probabilità.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{a}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1-\theta}{2} & 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{altrove, } \theta \in [0,1]. \end{cases} \tag{b}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{c}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{d}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{e}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{f}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{g}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{h}$$

Soluzione Le funzioni in (c), (f), (h) non sono funzioni di densità in quanto la funzione in (c) è negativa, la funzione in (f) non è integrabile e la funzione in (h) integra a 16.

Esercizio 2
La funzione di densità f_X di una variabile aleatoria continua X è data da

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^3 & 1 < x < 3 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

per un opportuno valore di c.

1. Calcolare il valore di c [$c = 1/20 = 0.05$].
2. Calcolare il valore atteso di X [$\mathrm{E}(X) = 2.42$].
3. Calcolare la varianza di X [$\mathrm{Var}(X) = 728/120 - (2.42)^2 \simeq 0.21027$].

Esercizio 3
Se X è una variabile aleatoria continua con distribuzione uniforme sull'intervallo (a, b) $(a < b)$, quanto valgono media e varianza di X?

Soluzione

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b+a}{2}; \\ \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - \frac{(b+a)^2}{4} \\ &= \frac{(b^2 + a^2 + ab)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Esercizio 4
Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{25} & 0 < x \leq 5 \\ -\frac{x}{25} + \frac{2}{5} & 5 < x \leq 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Determinare $P(2 \leq X \leq 9)$.
2. Quanto vale $\mathrm{E}(X)$?

Soluzione

1. $P(2 \leq X \leq 9) = \int_2^9 f(x)dx = \int_2^5 \frac{x}{25} dx + \int_5^9 (-\frac{x}{25} + \frac{2}{5}) dx = \frac{x^2}{50}\Big|_2^5 - \frac{x^2}{50}\Big|_5^9 + \frac{2}{5}x\Big|_5^9 = 0.9$

2. $\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^5 x \frac{x}{25} dx + \int_5^{10} x(-\frac{2}{50}x + \frac{2}{5}) dx = \frac{11}{3}$.

Esercizio 5
Sia X una variabile aleatoria normale standard ($X \sim N(0,1)$). Facendo uso delle tavole:

1. si determinino:

   $P(X \leq 0.2),\ P(X > 0.2),\ P(X < -0.2),\ P(-0.2 < X < 0.2)$

2. Qual è il quantile di ordine 0.95 di X?

3. Per quale valore di k, $P(-k < X < k) = 0.95$?

Soluzione
1. $P(X \leq 0.2) = \phi(0.2) = 0.5793$, $P(X > 0.2) = 1 - \phi(0.2) = 1 - 0.5793 = 0.4207$; $P(X < -0.2) = P(X > 0.2) = 0.4207$; $P(-0.2 < X < 0.2) = 2\phi(0.2) - 1 = 0.1586$;
2. Devo ora determinare k tale che $\phi(k) = 0.95$, dalle tavole ottengo: $k = 1.644$.
3. dalla simmetria della normale standard (intorno allo zero) ricavo che $P(-k < X < k) = 2\phi(k) - 1$. Impongo $2\phi(k) - 1 = 0.95$, ossia $\phi(k) = (1 + 0.95)/2 = 0.975$, k è dunque il quantile di ordine 0.975: $k = 1.96$.

Esercizio 6
Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i. i. d. tali che $\mathrm{E}(X_1) = \mu = 80$ e $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 = 36$. Sia inoltre $\overline{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

1. Usando la diseguaglianza di Chebyshev, determinare due valori q_1 e q_2 tali che $P(q_1 < X_1 < q_2) \geq 0.91$.

2. Sulla base della risposta al punto precedente, per quali valori di q si verifica $P(X_1 > q) \geq 0.91$?

3. Usando la diseguaglianza di Chebyshev, determinare per quali n si ha $P(79.98 < \overline{X}_n < 80.02) \geq 0.91$

4. Se abbiamo l'ulteriore informazione che X_1 (e quindi anche $X_2, \ldots, X_n$) ha legge normale, come cambia la risposta al punto 3.?

Soluzione

1. Svolgendo il modulo nella diseguaglianza di Chebyshev, questa si scrive nella forma:

   $$P(\mu - \delta\sigma < X_1 < \mu + \delta\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}$$

   Quindi, imponendo $1 - \frac{1}{\delta^2} = 0.91$ otteniamo $\delta = 1/\sqrt{0.09} = 10/3$, dovendo essere $\delta > 0$.
   Con $\delta = 10/3$, $\mu = 80$, $\sigma = 6$, abbiamo $P(60 < X_1 < 100) \geq 0.91$.

2. Essendo $P(60 < X_1) \geq P(60 < X_1 < 100) \geq 0.91$, posso scegliere $q \leq 60$.

3. Applichiamo Chebyshev a $\overline{X}_n$:

$$P\left(\mu - \delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}_n < \mu + \delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}$$

   Ad esempio da $\mu + \delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 80.02$, per $\mu = 80$ e $\sigma = 6$, ricaviamo $\delta = 0.02 * \sqrt{n}/6$ e la disuguaglianza di Chebyshev diventa:

$$P(79.98 < \overline{X}_n < 80.02) \geq 1 - \frac{36}{0.02^2 * n} \geq 0.91$$

   La seconda disuguaglianza, ossia $1 - \frac{36}{0.02^2 n} \geq 0.91$, è vera per ogni $n \geq 10^6$.

4. Se le v.a. X_i sono normali, anche $\overline{X}_n$ lo è. Quindi

$$P(|\overline{X}_n - \mu| < 0.02) = 2F_X(0.02) - 1 = 2\Phi(0.02 * \sqrt{n}/6) - 1 \geq 0.91$$

   e l'ultima disuguaglianza è verificata sse $\Phi(\sqrt{n}/300) \geq \frac{1+0.91}{2} = 0.955$ sse $\sqrt{n}/300 \geq z_{0.955} = 1.695$ da cui si ottiene $n \geq 258572$.

   Notate come migliora la stima di n usando le informazioni sulla legge. La stima di n ottenuta con Chebyshev è veramente grossolana.