Esercitazioni del 27 Novembre 2001

Richiami di teoria

- Siano $X_t \sim P(\nu t)$ e $Y \sim Esp(\nu)$. Si dice **v.a. gamma** di parametri n (intero positivo) e ν (reale positivo) la v.a. Z che misura l'istante dell'n-esimo evento del processo di Poisson e si scrive $Z_n \sim \Gamma(n, \nu)$.
  - $f_{Z_n}(t) = \nu e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^{n-1}}{(n-1)!}$ per $t > 0$ e $f_Y(t) = 0$ altrove
  - $F_{Z_n}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^k}{k!}$ per $t > 0$ e $F_Y(t) = 0$ altrove
  - $\Gamma(1, \nu) = Esp(\nu)$
  - $\mathrm{E}Z_n = n\mathrm{E}Y = n/\nu$; $\mathrm{Var}Z_n = n\mathrm{Var}Y = n/\nu^2$

- **TLC**: se X_i sono n v.a. *i. i. d.* con valore atteso $\mu < \infty$ e varianza $\sigma^2 < \infty$ e $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ la v.a. media campionaria con media μ e varianza σ^2/n, allora la sua standardizzata $S_n^* = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ converge in legge alla $N(0, 1)$. Inoltre $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ converge a$N(n\mu, n\sigma^2)$.

- **Approssimazione normale della legge gamma**: poiché la distribuzione gamma $Z \sim \Gamma(n, \lambda)$ può essere vista come somma di distribuzioni esponenziali $Y_i \sim Esp(\lambda)$ *i. i. d.* per le quali, ricordiamo, $\mathrm{E}Y_i = 1/\lambda$ e $\mathrm{Var}Y_i = 1/\lambda^2$, ne segue che, per n "grande" $(n \geq 30)$, $Z \sim N(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2})$ e che $F_Z(t) = P(Z < t) \simeq \Phi(\frac{t-n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}}) = \Phi(\frac{\lambda t - n}{\sqrt{n}})$

- **Approssimazione normale della binomiale**: poiché la distribuzione binomiale $Z \sim Bin(n, p)$ può essere vista come somma di bernoulliane $Y_i \sim B(p)$ *i. i. d.* per le quali, ricordiamo, $\mathrm{E}Y_i = p$ e $\mathrm{Var}Y_i = p(1-p)$, ne segue che $Z \sim N(np, np(1-p))$ e che $F_Z(t) = P(Z \leq t) \simeq \Phi(\frac{t-np}{\sqrt{np(1-p)}})$. In questo caso le condizioni sulle quali porre attenzione sono: $np > 5$ e $n(1-p) > 5$. Poiché l'approssimazione normale funziona tanto meglio quanto più la distribuzione è simmetrica, per valori di p (o di $1-p$) prossimi a zero conviene utilizzare l'approssimazione di Poisson.

- **Correzione di continuità**: Poiché la funzione di ripartizione di una v.a. discreta è costante a tratti, se la v.a. che vogliamo approssimare con legge normale è discreta, conviene applicare un correttivo che tenga conto di questo fatto. Ad esempio nel caso della binomiale conviene usare la seguente migliore approssimazione: $P(X \leq k) \simeq \Phi(\frac{\sqrt{n}(k+0.5-\mu)}{\sigma})$

Esercizio 1 (Bramanti es. 3.50 pag. 181)
Un libro ha 400 pagine. Supponiamo che la probabilità che una pagina sia priva di errori sia 0.98 e che la presenza o meno di errori in pagine diverse siano eventi indipendenti. Sia X il numero di pagine che richiedono correzioni.

1. Riconoscere la legge di X.
2. Calcolare la probabilità che sia $X \geq 4$ facendo uso dell'approssimazione normale.
3. La probabilità calcolata in b potrebbe essere approssimata anche facendo uso di una v.a. notevole diversa dalla normale: quale? Si esegua il calcolo approssimato della probabilità che sia $X \geq 4$ facendo uso di questo secondo metodo.

Soluzione

1. Poiché si ipotizza che le pagine senza errori siano eventi indipendenti tutti di probabilità $p = 0.98$ possiamo subito concludere che $X \sim B(400, 0.02)$ con media $\mu = 8$ e varianza $\sigma^2 = 7.840$.
2. Dobbiamo calcolare $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$. Facendo uso della approssimazione normale otteniamo:
$$1 - P(X \leq 3) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{3 + 0.5 - 8}{\sqrt{7.840}}\right) =$$
$$= 1 - \Phi(-1.607) = \Phi(1.607) = 0.946$$
3. Poiché p è fortemente sbilanciato, possiamo fare uso della approssimazione poissoniana ovvero $X \sim P(8)$. Quindi:
$$1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-8}\frac{8^k}{k!} = 1 - e^{-8}\left(1 + 8 + \frac{64}{2} + \frac{512}{6}\right) \sim 0.9576$$

Esercizio 2 (Bramanti es. 3.49 pag. 181)
Il numero giornaliero di passeggeri da Milano a Firenze è una variabile aleatoria di distribuzione incognita. Supponendo che il valore atteso sia pari a 3000 e la deviazione standard pari a 500, si calcoli approssimativamente la probabilità che in 30 giorni il numero complessivo di viaggiatori sia almeno 100000.

Soluzione Pur essendo la distribuzione incognita possiamo affermare che le v.a. $X_i = \{\text{numero di viaggiatori in transito l'}i\text{-esimo giorno}\}$ sono $i.\ i.\ d.$. Quindi il numero complessivo di viaggiatori è rappresentato dalla v.a. $S_{30} = X_1 + \cdots + X_{30} \sim N(30 \cdot 3000, 30 \cdot 500^2)$. Quindi:

$$P(S_{30} \geq 100000) = 1 - P(S_{30} \leq 100000) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{10^5 + 0.5 - 9 \cdot 10^4}{\sqrt{30} \cdot 500}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(3.6516) = 1 - 0.99987 = 0.00013$$

Esercizio 3 (Bramanti es. 3.48 pag. 181)
Due dadi vengono lanciati per 60 volte consecutive. Qual è la probabilità di ottenere il numero 7 almeno 10 volte? Per rispondere: si determini la legge seguita dalla v.a. "numero di volte in cui si ottiene 7, lanciando 60 volte due dadi" e si scriva la formula esatta che assegna la probabilità dell'evento cercato; si calcoli poi la stessa probabilità facendo uso di una approssimazione.

Soluzione Eseguiamo quanto richiesto: poiché la probabilità di ottenere 7 lanciando due dadi è $p = 1/6$, possiamo affermare che $X = \{\text{numero di volte in cui ottengo 7 su 60 tiri}\} \sim B(60, 1/6)$. La formula esatta per il calcolo è:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = \sum_{k=0}^{9} \binom{60}{k} (1/6)^k (5/6)^{60-k}$$

Con la approssimazione normale ($np = 10 > 5$ e $n(1-p) = 50 > 5$) otteniamo:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{9 + 0.5 - 10}{\sqrt{10 \cdot 5/6}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-0.5}{5/\sqrt{3}}\right) = 1 - \Phi(-0.1 \cdot \sqrt{3}) = 1 - \Phi(-0.1732) = \Phi(0.1732) \sim 0.5688$$

Esercizio 4 (Bramanti esempio 118 pag. 179)
Il partito politico A ha avuto il 18% dei voti in una tornata elettorale. Una società ha effettuato un sondaggio exit-poll, chiedendo a un campione casuale di 1000 elettori, all'uscita dal seggio elettorale, per che partito avessero votato

e stimando da questo campione le percentuali dei voti ai diversi partiti. Qual è la probabilità che, in base al proprio campione, la società abbia dichiarato, per il partito A, una percentuale sbagliata di almeno un punto percentuale? Rifare i conti nell'ipotesi che l'ampiezza del campione sia 10 volte maggiore e confrontare i risultati.

Soluzione

Dobbiamo calcolare la probabilità che il partito A abbia preso meno del 17% o più del 19% dei voti totali. Detta $X = \{\text{numero elettori del campione che ha votato per } A\} \sim B(1000, 0.18)$ la v.a. binomiale di media $np = 180$ e varianza $np(1-p) = 180 \cdot 0.82 = 147.6$, dobbiamo calcolare $P(X \leq 170) + P(X \geq 190)$ Affrontando il calcolo diretto dovremmo computare, ad esempio,

$$P(X \leq 170) = \sum_{k=0}^{170} \binom{1000}{k} 0.18^k \, 0.82^{1000-k}$$

Utilizzando, invece, l'approsimazione normale, il fatto che essa è simmetrica intorno alla sua media $\mu = 180$ e la correzione di continuità, i calcoli si riducono a:

$$P(X \leq 170) + P(X \geq 190) = 2\Phi\left(\frac{170 + 0.5 - 180}{\sqrt{147.6}}\right) = 2\,\Phi(-0.782) =$$

$$= 2(1 - \Phi(0.872)) = 2 \cdot 0.2177 = 0.4354$$

Se, invece, $n = 10000$ otteniamo:

$$P(X \leq 1700) + P(X \geq 1900) = 2\Phi\left(\frac{1700 + 0.5 - 1800}{\sqrt{1476}}\right) = 2\,\Phi(-2.590) =$$

$$= 2(1 - \Phi(2.590)) = 2 \cdot 0.0048 = 0.0096$$

Se, oltre a $n = 10000$, poniamo anche $p = 0.04$ otteniamo:

$$P(X \leq 300) + P(X \geq 500) = 2\Phi\left(\frac{300 + 0.5 - 400}{\sqrt{384}}\right) = 2\,\Phi(-5.078) =$$

$$= 2(1 - \Phi(5.078)) \simeq 0$$

Esercizio 5
Il numero di telefonate che arrivano ad un centralino è, mediamente, di 20 all'ora. Si calcolino le probabilità che:

1. in un'ora non arrivino telefonate
2. la prima telefonata arrivi dopo meno di mezz'ora
3. la prima telefonata arrivi proprio dopo mezz'ora
4. la prima telefonata arrivi dopo più di mezz'ora
5. la seconda telefonata arrivi dopo più di mezz'ora
6. la terza telefonata arrivi dopo più di mezz'ora ma prima di un'ora
7. qual è il tempo medio di attesa tra due telefonate?

Soluzione Innanzi tutto definiamo l'unità di misura di t: $[t] = 1$ ora. Quindi chiamiamo X_t la v.a. che conta il numero di telefonate in arrivo in un intervallo di tempo di ampiezza t. Sappiamo che classicamente tale v.a. segue la legge poissoniana e poiché l'intensità del processo è $\nu = \lambda/t = 20$ (tel/ora) avremo $X_t \sim P(20 \cdot t)$. Chiamiamo, inoltre, Y la v.a. che misura l'istante di arrivo della prima telefonata e Z dell'n-esima. Ricordiamo che $Y \sim Esp(\nu)$ e $Z \sim \Gamma(n, \nu)$.

1. $P(X_1 = 0) = P(Y > 1) = e^{-20} \simeq 2 \cdot 10^{-9}$
2. $P(X_{0.5} > 0) = P(Y < 0.5) = F_Y(0.5) = 1 - e^{-10} \simeq 0.99995$
3. $P(Y = 0.5) = 0$
4. $P(X_{0.5} = 0) = P(Y > 0.5) = P(X_{0.5} < 2) = e^{-10} \simeq 5 \cdot 10^{-5}$
5. $P(Z_2 > 0.5) = 1 - P(Z_2 \leq 0.5) = P(X_{0.5} < 2) = \sum_{k=0}^{1} e^{-10} \frac{10^k}{k!} \simeq 5 \cdot 10^{-4}$
6. $P(0.5 < Z_3 < 1) = F_{Z_3}(1) - F_{Z_3}(0.5) = \sum_{k=0}^{2} e^{-10} \frac{10^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2} e^{-20} \frac{20^k}{k!} =$

   $= e^{-10}(1 + 10 + 50) - e^{-20}(1 + 20 + 200) \simeq 0.0027$
7. $\mathrm{E}Y = 1/\nu = 3$ min