Matematica Generale B
Esercitazione di recupero del 17 aprile 2004

SUCCESSIONI

Prerequisiti

Per la buona comprensione del materiale di seguito presentato è necessaria, come prerequisito, la conoscenza delle seguenti definizioni:

- Successione numerica
- Successione a termini positivi (negativi), successione costante
- Successione limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente
- Successione monotona crescente, decrescente, non crescente, non decrescente
- Maggiorante, minorante
- Definitivamente
- Limite (e annessi e connessi)
- Successione convergente, divergente, oscillante, regolare, irregolare
- Coppie convergenti
- Simboli di Landau, infinitesimi e infiniti, ordine di grandezza

E' inoltre necessario conoscere i seguenti teoremi:

- Limitatezza delle successioni convergenti
- Permanenza del segno
- Regolarità delle successioni monotone

Criteri per l'analisi del carattere di una successione

Negli esercizi presentati si fa uso dei principali criteri di determinazione del carattere di una successione che riassumiamo nella seguente tabella.

*(**Nota**: col simbolo "$\rightarrow$" si intenderà sempre "tende a ... per n che tende a $+\infty$")*

Criterio	Descrizione
del confronto	se $a_n \le b_n \le c_n$ definitivamente e $a_n, b_n \to L \quad \Rightarrow b_n \to L$
della radice	se $a_n > 0$ definitivamente e o $\sqrt[n]{a_n} \le r < 1$ definitivamente $\Rightarrow a_n \to 0^+$ o $1 < r \le \sqrt[n]{a_n}$ definitivamente $\Rightarrow a_n \to +\infty$
del rapporto	se $a_n > 0$ definitivamente e o $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1$ definitivamente $\Rightarrow a_n \to 0^+$ o $1 < r \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$ definitivamente $\Rightarrow a_n \to +\infty$
monotonia	se a_n è monotona e limitata allora a_n converge
coppie convergenti	se a_n è monotona crescente, b_n è monotona decrescente, $a_n \le b_n \quad \forall n$ e $a_n \sim b_n$ allora $a_n, b_n \to L = \sup_n a_n = \inf_n b_n$
sviluppi in serie	quando possibile si sostituiscono le funzioni contenute nel termine generale con i relativi sviluppi in serie riducendo il termine generale a un polinomio razionale facilmente valutabile

Sviluppi in serie

Riportiamo, per praticità, gli sviluppi in serie più frequentemente utilizzati nella determinazione del carattere di una successione. Qui con e_n intendiamo una qualunque successione infinitesima non necessariamente di segno costante.

$$\sin e_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{e_n^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(|e_n|^{2n+2}\right)$$

$$\cos e_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{e_n^{2k}}{(2k)!} + o\left(|e_n|^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{tg} e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e_n^{2k+1}}{2k+1} + o\left(|e_n|^{2n+2}\right)$$

$$\ln\left(1+e_n\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{e_n^{k+1}}{k+1} + o\left(|e_n|^{n+1}\right)$$

$$e^{e_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e_n^k}{k!} + o\left(|e_n|^n\right)$$

$$\frac{1}{1+e_n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e_n^k + o\left(|e_n|^n\right)$$

$$\left(1+e_n\right)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} e_n^k + o\left(|e_n|^n\right)$$

Formule di De Moivre-Stirling

$\ln n! = n \ln n - n + \ln \sqrt{2p\, n} + o(1)$

$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2p\, n} + o(1)$

Disuguaglianza di Bernoulli

$\left(1 \pm a\right)^n > 1 \pm na$

Successioni notevoli

E' opportuno conoscere un congruo numero di successioni notevoli alle quali ricondursi, ove ciò sia possibile, per stabilire il carattere della successione.

- $a_n = \dfrac{1}{n}$: *successione armonica*. E' monotona decrescente e limitata quindi converge (a 0^+) e il limite della successione si ricava facilmente applicando la definizione.
- $a_n = \dfrac{1}{n^p}$: *successione armonica generalizzata.* E' monotona decrescente e limitata quindi converge (a 0^+) $\forall p > 0$. E' monotona crescente e illimitata quindi diverge (a $+\infty$) $\forall p < 0$. E' costante e converge a 1 per $p = 0$.
- $a_n = a_0 + dn$ con $d \in \mathbb{R}$: *successione aritmetica*. E' monotona (il verso dipende dal segno di d) ma non è limitata quindi diverge.
- $a_n = q^n$ con $q \in \mathbb{R}$: *successione geometrica*, per la quale, affermiamo (ma non dimostriamo) che:

$$a_n \to \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 0^+ & 0 < q < 1 \\ 0 & -1 < q < 0 \\ oscilla & q \le -1 \\ q & q = 0,1 \end{cases}$$

- $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e$: *Successione di Nepero*. Per verificarne il carattere è necessario definire una successione $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Si verifica che a_n è monotona crescente e b_n è monotona decrescente ovvero, usando la disuguaglianza di Bernoulli, che $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1$ e che $\dfrac{b_{n-1}}{b_n} > 1$. Inoltre si verifica che $a_n < b_n$ e che $a_n \sim b_n$ (omettiamo i passaggi esposti in aula). Da ciò si conclude che a_n, b_n formano una coppia convergente.

- $(1+e_n)^{\frac{1}{e_n}} \to e$: *Nepero generalizzata*
- $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$ per $a_n \to +\infty$: *Nepero generalizzata*
- $\left(1+\frac{q}{a_n}\right)^{a_n} \to e^q$ per $a_n \to +\infty$ e $\forall q \neq 0$. Basta porre $b_n = \frac{a_n}{q} \to +\infty$ e osservare che $\left(1+\frac{q}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n q} = \left[\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right]^q$

Esercizi

Calcolare il limite della successione $a_n = \frac{\ln(1+e_n)}{e_n}$.

$\frac{\ln(1+e_n)}{e_n} = \ln\left[(1+e_n)^{\frac{1}{e_n}}\right] \to \ln e = 1$

Calcolare il limite della successione $a_n = e^{-n}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Tentiamo di trasformare il termine della successione in qualcosa di più semplice da trattare. Il trucco è quello di studiare $b_n = \ln a_n = -n + n^2 \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)$.

Ora sfruttiamo gli sviluppi in serie per arrivare ad avere una espressione razionale.

Cominciamo quindi con lo sviluppo del seno: $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Sarà sufficiente arrestare lo sviluppo al primo termine? non lo sapremo sino alla fine dei calcoli quindi non ci resta che tentare. Se il primo termine non fosse sufficiente dovremo tornare indietro e aggiungere un altro termine allo sviluppo.

Dunque $b_n = -n + n^2 \ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$. Ora sviluppiamo il logaritmo ponendoci nuovamente il problema del punto di arresto dello sviluppo. Proviamo a vedere cosa succede se ci fermiamo al primo termine: $\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \underbrace{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{1°\text{ termine}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{resto}}$.

Poichè della somma di un termine che tende a zero più rapidamente di n^{-2} e di un termine che tende a zero più rapidamente di n^{-1} possiamo solo dire che tende a zero più rapidamente di n^{-1}, lo sviluppo del nostro logaritmo arrestato al primo termine diventa dunque $\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. Dovendo però moltiplicare questa quantità per

n^2, ciò che otteniamo è una quantità divergente. Siamo dunque costretti ad aggiungere un ulteriore termine al nostro sviluppo:

$\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\underbrace{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{1°\text{ termine}}\underbrace{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2}_{2°\text{ termine}}\underbrace{+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{resto}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dove il doppio prodotto del secondo termine è stato inglobato in $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ perchè tendente a zero più rapidamente di n^{-3}.

Ora riportiamo lo sviluppo nella nostra espressione che è, finalmente, razionale:

$b_n=-n+n^2\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\cancel{-n}\cancel{+n}-\frac{1}{2}+o(1)\to-\frac{1}{2}$ da cui ricaviamo, infine, $a_n=e^{b_n}\to e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Osserviamo che, per fortuna, lo sviluppo del seno arrestato al primo termine è stato sufficiente ai nostri scopi.

Calcolare il limite della successione $a_n=n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+n$

Anche in questo caso conviene sviluppare in serie il logaritmo. Poichè questi andrà moltiplicato per n^2, forti dell'esperienza precedente, proseguiremo lo sviluppo sino al secondo termine: $\ln\left[1-\frac{1}{n}\right]=\underbrace{\left(-\frac{1}{n}\right)}_{1°\text{termine}}\underbrace{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^2}_{2°\text{termine}}\underbrace{+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{resto}}$.

Dunque: $a_n=n^2\left[-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+n=\cancel{-n}-\frac{1}{2}+o(1)\cancel{+n}\to-\frac{1}{2}$

Calcolare il limite della successione $a_n=\dfrac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}$

Sviluppiamo in serie la potenza del binomio fermandoci al primo termine: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^a=1-\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. Sostituendo ricaviamo $a_n=\dfrac{1-\left[1-\frac{5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{1-\left[1-\frac{5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\dfrac{5+o(1)}{3+o(1)}\to\dfrac{5}{3}$.
