Matematica Generale B
Esercitazione di recupero del 17 aprile 2004

SERIE

Prerequisiti

Per la buona comprensione del materiale di seguito presentato è necessaria, come prerequisito, la conoscenza di quanto svolto sinora nel corso e delle seguenti definizioni:

- Serie numerica
- Successione delle somme parziali
- Somma della serie
- Serie a termini non negativi, non positivi, a termini alterni
- Convergenza semplice, convergenza assoluta

Criteri per l'analisi del carattere di una serie

Negli esercizi presentati si fa uso dei principali criteri di determinazione del carattere di una serie che riassumiamo nella seguente tabella.

Criterio	Descrizione
C.N. di convergenza	$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ conv $\Rightarrow a_n \to 0$
C.N.S. - Cauchy	$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ conv $\Leftrightarrow \forall e > 0\ \exists n_0 = n_0(e) : \forall n, m > n_0\ \lvert S_n - S_m \rvert < e$
del confronto	se $0 < a_n < b_n$ definitivamente allora o $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ conv $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ conv o $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ div $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ div
del confronto asintotico	sia $a_n \sim b_n$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ conv $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ conv
della radice	se $\sqrt[n]{a_n} \le r < 1$ definitivamente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ conv se $\sqrt[n]{a_n} > 1$ per infiniti valori di n $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ div
del rapporto	se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1$ definitivamente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ conv se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ definitivamente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ div
di Leibniz	se $a_n \ge a_{n+1} \wedge a_n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ conv
convergenza assoluta	se $\sum_{n=0}^{+\infty} \lvert a_n \rvert$ conv $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ conv

Serie notevoli

Serie armonica: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Serie armoniche generalizzate:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{conv} & p > 1 \\ \text{div} & p \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q} \begin{cases} \text{conv} & p > 1 \wedge \forall q \\ \text{conv} & p = 1 \wedge q > 1 \\ \text{div} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Serie telescopiche: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(b_n - b_{n+1}\right)$. Se $b_n \to b \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = b_0 - b$

Serie di Mengoli: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

Serie geometrica: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ per $|q| < 1$

Esercizi

Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ è convergente e calcolarne la somma.

Analizzando il termine generale notiamo che $4n+3 = 4(n+1)-1$

Quindi i fattori a denominatore possono essere considerati come due termini consecutivi di una stessa successione e ciò deve farci pensare alle serie telescopiche.

Osserviamo che, dati due binomi $P(n) = an + b$ e $Q(n) = cn + d$, è sempre possibile scrivere la frazione $\frac{1}{P(n)Q(n)}$ come somma di $\frac{x}{P(n)} + \frac{y}{Q(n)}$ con x e y opportuni.

Per ricavare x e y notiamo che affinchè sia $\frac{1}{P(n)Q(n)} = \frac{x}{P(n)} + \frac{y}{Q(n)} = \frac{xQ(n) + yP(n)}{P(n)Q(n)}$ deve essere $xQ(n) + yP(n) \equiv 1$ identicamente.

Questo porta alla risoluzione di un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x e y. Vediamo come.

Affinchè sia $\frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{x}{(4n-1)} + \frac{y}{(4n+3)} = \frac{x(4n+3) + y(4n-1)}{(4n-1)(4n+3)}$, deve valere $x(4n+3) + y(4n-1) = 4(x+y)n + 3x - y \equiv 1$ per ogni n.

Ovvero l'uguaglianza $\left[4(x+y)\right]n + \left[3x - y\right] = 0 \cdot n + 1$ deve valere coefficiente per coefficiente.

Ciò conduce al seguente sistema:

$$\begin{cases} 4(x+y)=0 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Pertanto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n - b_{n+1} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4(n+1)-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ perchè la serie data è effettivamente telescopica.

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Poichè $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ termine di una serie convergente, per il criterio del confronto la serie converge.

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{4n^2-3}$.

La C.N. per la convergenza è soddisfatta ma poichè $\frac{n}{4n^2-3} > \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$ termine generale della serie armonica notoriamente divergente, per il criterio del confronto la serie diverge.

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n\cdot 5^n}$

Poichè $\frac{3^n}{n\cdot 5^n} = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n < \left(\frac{3}{5}\right)^n$ termine generale della serie geometrica di ragione $q=\frac{3}{5}$ quindi convergente, per il criterio del confronto la serie converge.

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)e^n}$.

Applichiamo il criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(n+2)e^{n+1}}\frac{(n+1)e^n}{n} = \frac{1}{e}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \to \frac{1}{e} < 1$.

Dunque la serie converge.

Al medesimo risultato si perviene applicando il criterio della radice:

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{e}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \to \frac{1}{e} < 1$ (si ricordi che $\sqrt[n]{n} \to 1^+$).

Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ è convergente e calcolarne la somma.

Col criterio della radice si ricava immediatamente $\sqrt[n]{a_n} = \frac{8}{9} < 1$ e la serie converge.

Ma osservando attentamente il termine generale $a_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$ ci accorgiamo che è è il termine generale di una serie geometrica di ragione $q = \frac{8}{9} < 1$. Per calcolarne correttamente la somma dobbiamo anche ricordare che nella serie geometrica l'indice della sommatoria parte da 0 e non da 1. Quindi dovremo prima "correggere" la nostra serie nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = -1 + \frac{1}{1-q} = -1 + 9 = 8\,.$$

Osservazione importante: abbiamo appena visto che se la serie in esame "assomiglia" ad una serie geometrica dovremo "aggiustarla" prima di calcolarne la somma in modo corretto.

In genere gli aggiustamente che possono essere necessari sono di due tipi:

1) il termine della serie è quello di una serie geometrica ma l'indice della sommatoria non parte da 0 ma da un intero $m > 0$.
   In questo caso dovremo aggiungere e togliere le prime m potenze di q che verranno inglobate nella sommatoria:
   $$\sum_{n=m}^{+\infty} q^n = q^m + q^{m+1} + \cdots = -\left(1 + q + \cdots + q^{m-1}\right) + \left(1 + q + \cdots + q^{m-1}\right) + q^m + q^{m+1} + \cdots =$$
   $$= -\left(1 + q + \cdots + q^{m-1}\right) + \sum_{n=m}^{+\infty} q^n = -\left(1 + q + \cdots + q^{m-1}\right) + \frac{1}{1-q}$$
2) L'indice della serie parte da 0 ma la ragione ha esponente diverso da n.
   In questo caso dovremo raccogliere una opportuna potenza di q:
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n+m} = q^m \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

Nei casi misti prima si deve procedere col passo 1) e poi col passo 2).

Esempio (tratto dalla domanda 2 del tema d'esame del 14.01.2004)

Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$.

La serie ha il termine generale molto simile a quello di una serie geometrica. Infatti è sufficiente raccogliere un fattore 2 per essere ricondotti ad essa:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = 2\frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$
