Matrici

Esercizio 1

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

calcolare, se possibile, i prodotti

$$AB \quad \text{e} \quad BA$$

Soluzione

La matrice A ha due righe e due colonne ovvero é una matrice 2×2 mentre la matrice B" é una matrice 2×3. Poiché il numero di colonne di A é uguale al numero di righe di B é definito il prodotto AB.

La matrice AB" ha lo stesso numero di righe di A e lo stesso numero di colonne di B pertanto AB é una matrice 2×3. Risulta inoltre:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Il prodotto BA non é definito perché il numero di colonne della matrice B é diverso dal numero di righe della matrice A.

Esercizio 7 Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 21$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 60 + 12 + 12 - 15 + 8 = 79$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$$

$$\det(E) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 9 + 12 = 21$$

Per calcolare il determinante della matrice F facciamo lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga.

$$\det(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -156$$

Esercizio 9 Si calcoli il rango delle seguenti matrici, al variare del parametro reale k:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione

Per calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

riduciamola a gradino. Una possibile riduzione, operando sulle righe, é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - 3I \\ I - III \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II + III \end{matrix}$$

Il rango della matrice ridotta é uguale al numero di righe non identicamente nulle e pertanto é uguale, in questo caso, a 2.

Per calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{pmatrix}$$

ne calcoliamo il determinante. Risulta

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{vmatrix} = 3(k-1)^2(k+1).$$

Per $k \neq \pm 1$ il determinante della matrice é non nullo e dunque il rango é uguale a 3.

Se $k = -1$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che la prima e la terza riga sono proporzionali, mentre un minore non nullo di ordine 2 é, per esempio:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6.$$

La matrice ha allora rango 2.

Per $k = 1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La seconda e la terza riga sono multiple della prima, ne segue che il rango della matrice é uguale a 1.

Infine per calcolare il rango dell'ultima matrice riduciamola a gradino. Una possibile riduzione, operando sulle righe, é:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} III \\ I \\ II \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -k & 2-k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - I \\ III - kI \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -k & 2-k \\ 0 & k & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -k & 2-k \\ 0 & 0 & k^2-4 & k^2-2k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 4III - kII \end{matrix}$$

Per ogni valore di k la prima e la seconda riga della matrice ridotta non sono mai identicamente nulle. La terza riga, invece, é identicamente nulla per $k = 2$. Ne segue che il rango della matrice é 2 per $k = 2$ e 3 per $k \neq 2$.

Esercizio 10 Dire per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{pmatrix}$$

é invertibile e determinare la sua inversa.

Soluzione

Una matrice quadrata é invertibile se e solo se il suo determinante é non nullo. Il determinante della matrice A é uguale a

$$\det(A) = 2k(k-2)$$

sicché per $k \neq 0, 2$ la matrice A é invertibile. Per determinare l'inversa consideriamo la trasposta di A:

$$A^t = \begin{pmatrix} k & 4 \\ k & 2k \end{pmatrix}$$

di cui calcoliamo la matrice dei cofattori :

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -4 & k \end{pmatrix}$$

Risulta allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k-2} & -\frac{1}{2(k-2)} \\ \\ -\frac{2}{k(k-2)} & \frac{1}{2(k-2)} \end{pmatrix}$$

.