Sistemi Lineari

Esercizio 15

Determinare le soluzioni del seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Soluzione

La matrice completa associata al sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo la matrice a gradino. Una possibile riduzione per righe é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema associato all'ultima matrice é:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

che anmmette l'unica soluzione:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

In modo alternativo si puó precedere come segue. La matrice dei coefficienti associata al sistema é la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di A é uguale a : $\det(A) = -12$.

Ne segue che la matrice A ha rango 3 cosí come la matrice completa associata al sistema. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha una unica soluzione. D'altra parte ogni sistema omogeneo ha almeno la soluzione banale, pertanto la soluzione é:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 16 Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente sistema non omogeneo:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{cases}$$

Soluzione

La matrice completa associata al sistema é la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione a gradino é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta é 2 mentre il rango della matrice completa é 3. Il sistema non ha soluzioni. D'altra parte, nel sistema associato all'ultima matrice, l'ultima riga corrisponde all'equazione $0 = 8$ manifestamente falsa.

Esercizio 17 Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente sistema non omogeneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$$

Soluzione

La matrice completa associata al sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione a gradino é :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice dei coefficienti é uguale al rango della matrice completa e pari a 2. Dal teorema di Rouché-Capelli segue che il sistema ammette infinite soluzioni.

Per determinare le soluzioni scriviamo il sistema associato alla matrice ridotta:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ -y + 2z = -2 \end{cases}$$

Risolvendo in funzione della variabile z, si ottiene:

$$\begin{cases} x = -1 - 7z \\ y = 2 + 2z. \end{cases}$$

Posto $z = t$, con $t \in R$, le soluzioni si riscrivono:

$$\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = 2 + 2t \\ z = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Esercizio 18 Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente sistema non omogeneo:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

Soluzione

La matrice completa associata al sistema é la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix}$$

Per ridurre piú rapidamente la matrice a gradino scambiamo la prima e la seconda colonna, ottenendo cosí la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -1 & 16 \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'aver scambiato le prime due colonne colonne della matrice implica che l'ordine scelto per le variabili, nello scrivere il sistema associato, diventa y, x, z. Una possibile riduzione per righe é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -1 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & 15 \\ 0 & 11 & -10 & 31 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & 15 \\ 0 & 0 & 26 & -52 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice completa é uguale al rango della matrice incompleta ovvero pari a 3. Il sistema allora ammette una unica soluzione. Per determinarla scriviamo, ricordando che abbiamo scambiato le prime due colonne, il sistema associato alla matrice ridotta:

$$\begin{cases} y + 2x - 3z = 5 \\ 7x - 4z = 15 \\ 26z = -52 \end{cases}$$

la cui soluzione é: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$.

Esercizio 23 Discutere l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale k e determinare, ove esistano, le soluzioni.

$$\begin{cases} x+y+kz=1 \\ x+ky+z=1 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$$

Soluzione

La matrice dei coefficienti del sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante é pari a $\det(A) = -(k+2)(k-1)^2$.

Per $k \neq 1, -2$ il sistema ammette una e una sola soluzione . Determiniamola utilizzando la regola di Cramer. Risulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{k+2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{k+2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{k+2}$$

Per $k = 1$ la matrice completa del sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che la matrice completa e la matrice incompleta hanno entrambe rango 1. Il sistema ammette infinite soluzioni che sono le soluzioni dell'equazione $x+y+z=1$. Risulta allora:

$$\begin{cases} x = 1-s-t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad s, t \in R$$

Se $k = -2$ la matrice completa del sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Riduciamo la matrice a gradino:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Segue che, per $k = -2$, il sistema non ammette alcuna soluzione.