Università degli Studi di Milano Bicocca–Facoltà di Economia
Matematica Generale modB–2002/2003
Seconda prova parziale

1. i) Dare la definizione di rango di una matrice.

Si rimanda al testo adottato.

ii) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, si calcoli il rango di A, $\mathrm{r}(A)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A) = \det \begin{bmatrix} k & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = k - 3 + 6 = k + 3;$

- se $k \neq -3$, allora $\mathrm{r}(A) = 3$;
- se $k = -3$, allora $\mathrm{r}(A) = 2$; infatti si ha, ad esempio: $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$.

2. Data la funzione $f : [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x - 2}$,
i) si dia la definizione di primitiva di f e si determini la primitiva F tale che $F(2) = 0$;

Per la definizione si rimanda al testo adottato.

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2};$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln \frac{x-1}{x+2} + k;$$

$$F(2) = \ln(1/4) + k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \ln 4;$$

$$F(x) = \ln \frac{x-1}{x+2} + \ln 4.$$

ii) si dia la definizione dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$, si dica se converge e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Poiché $f(x) \sim \dfrac{3}{x^2}$, se $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale generalizzato converge.

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x-1}{x+2} + \ln 4 = \ln 4.$$

1. i) Dare la definizione di rango di una matrice.

Si rimanda al testo adottato.

ii) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, si calcoli il rango di A, $\mathrm{r}(A)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} k & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 + k - 3 = k - 4;$

• se $k \neq 4$, allora $\mathrm{r}(A) = 3$;
• se $k = 4$, allora $\mathrm{r}(A) = 2$; infatti si ha, ad esempio: $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$.

2. Data la funzione $f : [4, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - x - 6}$,
i) si dia la definizione di primitiva di f e si determini la primitiva F tale che $F(4) = 0$;

Per la definizione si rimanda al testo adottato.

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - x - 6} = \frac{3}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2};$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln \frac{x-3}{x+2} + k;$$

$$F(4) = \ln(1/6) + k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \ln 6;$$

$$F(x) = \ln \frac{x-3}{x+2} + \ln 6.$$

ii) si dia la definizione dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$, si dica se converge e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Poiché $f(x) \sim \dfrac{5}{x^2}$, se $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale generalizzato converge.

$$\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_4^x f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x-3}{x+2} + \ln 6 = \ln 6.$$

1. i) Dare la definizione di rango di una matrice.

Si rimanda al testo adottato.

ii) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, si calcoli il rango di A, $\mathrm{r}(A)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -k + 1;$

• se $k \neq 1$, allora $\mathrm{r}(A) = 3$;
• se $k = 1$, allora $\mathrm{r}(A) = 2$; infatti si ha, ad esempio: $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$.

2. Data la funzione $f : [3, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - x - 2}$,
i) si dia la definizione di primitiva di f e si determini la primitiva F tale che $F(3) = 0$;

Per la definizione si rimanda al testo adottato.

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x - 2} = \frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1};$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln \frac{x-2}{x+1} + k;$$

$$F(3) = \ln(1/4) + k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \ln 4;$$

$$F(x) = \ln \frac{x-2}{x+1} + \ln 4.$$

ii) si dia la definizione dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$, si dica se converge e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Poiché $f(x) \sim \dfrac{3}{x^2}$, se $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale generalizzato converge.

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_3^x f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x-2}{x+1} + \ln 4 = \ln 4.$$

1. i) Dare la definizione di rango di una matrice.

Si rimanda al testo adottato.

ii) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ k & 3 & 0 \end{bmatrix}$, si calcoli il rango di A, $\mathrm{r}(A)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ k & 3 \end{bmatrix} = -3 + 6 - k = 3 - k;$

• se $k \neq 3$, allora $\mathrm{r}(A) = 3$;
• se $k = 3$, allora $\mathrm{r}(A) = 2$; infatti si ha, ad esempio: $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$.

2. Data la funzione $f : [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$,
i) si dia la definizione di primitiva di f e si determini la primitiva F tale che $F(2) = 0$;

Per la definizione si rimanda al testo adottato.

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{4}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3};$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln \frac{x-1}{x+3} + k;$$

$$F(2) = \ln(1/5) + k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \ln 5;$$

$$F(x) = \ln \frac{x-1}{x+3} + \ln 5.$$

ii) si dia la definizione dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$, si dica se converge e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Poiché $f(x) \sim \dfrac{4}{x^2}$, se $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale generalizzato converge.

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x-1}{x+3} + \ln 5 = \ln 5.$$

1. i) Dare la definizione di rango di una matrice.

Si rimanda al testo adottato.

ii) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & k \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, si calcoli il rango di A, $\mathrm{r}(A)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 2 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 - k - 6 = -k - 3;$

- se $k \neq -3$, allora $\mathrm{r}(A) = 3$;
- se $k = -3$, allora $\mathrm{r}(A) = 2$; infatti si ha, ad esempio: $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$.

2. Data la funzione $f : [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 3x - 4}$,
i) si dia la definizione di primitiva di f e si determini la primitiva F tale che $F(2) = 0$;

Per la definizione si rimanda al testo adottato.

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 3x - 4} = \frac{5}{(x-1)(x+4)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4};$$

$$\int f(x)\, dx = \int \frac{1}{x-1}\, dx - \int \frac{1}{x+4}\, dx = \ln \frac{x-1}{x+4} + k;$$

$$F(2) = \ln(1/6) + k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \ln 6;$$

$$F(x) = \ln \frac{x-1}{x+4} + \ln 6.$$

ii) si dia la definizione dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$, si dica se converge e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Poiché $f(x) \sim \dfrac{5}{x^2}$, se $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale generalizzato converge.

$$\int_2^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x f(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x-1}{x+4} + \ln 6 = \ln 6.$$

1. i) Dare la definizione di rango di una matrice.

Si rimanda al testo adottato.

ii) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, si calcoli il rango di A, $\mathrm{r}(A)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A) = -\det \begin{bmatrix} 3 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -3 + k - 1 = k - 4;$

- se $k \neq 4$, allora $\mathrm{r}(A) = 3$;
- se $k = 4$, allora $\mathrm{r}(A) = 2$; infatti si ha, ad esempio: $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$.

2. Data la funzione $f : [3, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + x - 6}$,
i) si dia la definizione di primitiva di f e si determini la primitiva F tale che $F(3) = 0$;

Per la definizione si rimanda al testo adottato.

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + x - 6} = \frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3};$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln \frac{x-2}{x+3} + k;$$

$$F(3) = \ln(1/6) + k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \ln 6;$$

$$F(x) = \ln \frac{x-2}{x+3} + \ln 6.$$

ii) si dia la definizione dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$, si dica se converge e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Poiché $f(x) \sim \dfrac{5}{x^2}$, se $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale generalizzato converge.

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_3^x f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x-2}{x+3} + \ln 6 = \ln 6.$$