MATEMATICA GENERALE MODULO B		13 giugno 2003
cognome :	**nome :**	**matricola :**

Ecocomm A-D (Carcano)	**Ecocomm E-O (Carcano)**	**Ecocomm P-Z (Valaperta)**	
Ecoban (Zambruno)	**Ecoint-soc-pub (Mauri)**	**Ecotur-sti (Monti)**	**Ecoamm (Grassi)**

Attenzione:

- Lo studente deve compilare questo foglio in ogni parte e deve barrare il nome del proprio corso di laurea. Questo foglio va restituito insieme con lo svolgimento (solo i fogli "di bella")

1

(i) Si consideri il generico sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ matrice $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
• Si ricordino le definizioni di *sistema possibile (consistente) / impossibile (inconsistente), determinato / indeterminato*.
• Utilizzando la proprietà di linearità del prodotto matrice per vettore, si dimostri che, se un sistema **omogeneo** ammette una soluzione non nulla, allora ammette *infinite* soluzioni non nulle.

(ii) In dipendenza dal parametro reale α, si discuta il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ove $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Si determinino tutte le soluzioni del sistema, in corrispondenza del valore, o dei valori, di α, per il/i quale/i il sistema è possibile.

Soluzione

(i) **3 punti il primo •, 2 punti il secondo •**
• Si veda libro di testo *Manuale modulare di Metodi Matematici, Modulo 4,* pag.79.
• Sia $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$; allora, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{Ax}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

quindi si hanno le infinite soluzioni $\alpha\mathbf{x}$ (retta per l'origine).

(ii) **3 punti**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ ha rango $\begin{cases} \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$

◇ Per $\alpha = 0$, si ha

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathrm{r}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} = 2$$

quindi, per il Teorema di Rouché Capelli, il sistema è impossibile.

◇ Per $\alpha \neq 0$, si ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2 = m$, quindi il sistema è *normale*; è possibile, perché, se $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = m$, allora per forza $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = m$.

Utilizzando come sottomatrice di ordine 2 non singolare, $\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, si ottiene

$$\begin{cases} x - \alpha y = 1 - 2\alpha z \\ x = 2 + \alpha z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + \alpha z \\ y = \dfrac{1}{\alpha} + 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \alpha t \\ \frac{1}{\alpha} + 3t \\ t \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

2

(i) Si ricordino gli enunciati della *condizione necessaria per la convergenza* e del *criterio del rapporto.*
(ii) Si diano esempi di:
- serie a termini positivi, convergente;
- serie a termini di segno alterno, convergente, ma non assolutamente convergente.

Soluzione

(i) **1 punto la condizione necessaria, 2 punti il criterio**
Si veda libro di testo *Manuale modulare di Metodi Matematici, Modulo 5,* capitolo 2.
(ii) **2 punti per ogni •**
• Qualsiasi serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, con ragione $q \in [0,1)$; oppure la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; oppure la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, con $\alpha > 1, \beta \in I\!R$, oppure $\alpha = 1, \beta > 1$; oppure ... ...
• La serie del *Tizio indeciso*: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; oppure $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$; oppure ... ...

3

Si consideri la funzione f, definita da $f(x) = \dfrac{3x-8}{x^2-6x+8}$.
(i) Si determini l'integrale indefinito di f.
(ii) Si determini la primitiva F di f, tale che $F(3) = 2$.
(iii) **Facoltativo:** Sfruttando il risultato del punto (i), si determini se esiste un punto $c \in [5,6]$ tale che $f(c) = \log \frac{16}{3}$.

Soluzione

(i) **5 punti**
Si determina dapprima la decomposizione in fratti semplici (D.F.S.) di f:

$$\frac{3x-8}{x^2-6x+8} = \frac{3x-8}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

pertanto, in ogni intervallo $[a,b] \subset (-\infty, 2) \cup (2,4) \cup (4, +\infty)$, si ha:

$$\int f(x)dx = \int \frac{3x-8}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{x-4} =$$
$$= \log\left(|x-2|(x-4)^2\right) + c \qquad (c \in I\!R)$$

(ii) **3 punti**
Imponendo la condizione $F(3) = 2$ all'insieme delle primitive di f, si ottiene

$$2 = F(3) = \left[\log\left(|x-2|(x-4)^2\right) + c\right]_{|x=3} = \log 1 + c = c$$

e quindi $c = 2$; la primitiva cercata è quindi

$$F(x) = \log\left(|x-2|(x-4)^2\right) + 2$$

(iii) **+2 punti**
Facoltativo:

Il valor medio (media integrale) di f nell'intervallo $[5,6]$ è

$$\int_5^6 \frac{3x-8}{x^2-6x+8}dx = \left[\log\left(|x-2|(x-4)^2\right)\right]_5^6 = \log(16) - \log 3 = \log\frac{16}{3}$$

la funzione f è continua nell'intervallo $[5,6]$, quindi, per il *Teorema del valor medio*, esiste $c \in [5,6]$ tale che $f(c) = \log\frac{16}{3}$.

$\boxed{4}$

Si determini il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+\frac{2}{n})}{n}$.

Soluzione

7 punti

Dal limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$, segue

$$a_n = \frac{\log(1+\frac{2}{n})}{n} \sim \frac{\frac{2}{n}}{n} = \frac{2}{n^2} \qquad \text{per} \quad n \to +\infty$$

pertanto, dal criterio del confronto asintotico, si ha che la serie data ha lo stesso carattere della serie $2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, notoriamente convergente.

Si conclude che la serie data è convergente; essendo a termini positivi, la sua somma è positiva.

MATEMATICA GENERALE MODULO B		13 giugno 2003
cognome :	**nome :**	**matricola :**

Ecocomm A-D (Carcano)	**Ecocomm E-O (Carcano)**	**Ecocomm P-Z (Valaperta)**	
Ecoban (Zambruno)	**Ecoint-soc-pub (Mauri)**	**Ecotur-sti (Monti)**	**Ecoamm (Grassi)**

Attenzione:

- Lo studente deve compilare questo foglio in ogni parte e deve barrare il nome del proprio corso di laurea. Questo foglio va restituito insieme con lo svolgimento (solo i fogli "di bella")

1

(i) Si consideri il generico sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ matrice $m \times n$, $\mathbf{x} \in I\!R^n$, $\mathbf{b} \in I\!R^m$.
• Si ricordino le definizioni di *sistema possibile (consistente) / impossibile (inconsistente), determinato / indeterminato.*
• Utilizzando la proprietà di linearità del prodotto matrice per vettore, si dimostri che, se il sistema ammette due soluzioni $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, allora il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è una soluzione del sistema omogeneo associato.

(ii) In dipendenza dal parametro reale α, si discuta il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ove $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2\alpha \\ -\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
Si determinino tutte le soluzioni del sistema, in corrispondenza del valore, o dei valori, di α, per il/i quale/i il sistema è possibile.

Soluzione

(i) **3 punti il primo •, 2 punti il secondo •**
• Si veda libro di testo *Manuale modulare di Metodi Matematici, Modulo 4,* pag.79.
• Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ soluzioni del sistema dato (quindi $\mathbf{Av} = \mathbf{Aw} = \mathbf{b}$); si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{Av} - \mathbf{Aw} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

quindi $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è una soluzione del sistema omogeneo associato $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
(ii) **3 punti**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2\alpha \\ -\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ ha rango $\begin{cases} \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$

◇ Per $\alpha = 0$, si ha

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathrm{r} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \alpha & | & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2$$

quindi, per il Teorema di Rouché Capelli, il sistema è impossibile.
◇ Per $\alpha \neq 0$, si ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2 = m$, quindi il sistema è *normale*; è possibile, perché, se $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = m$, allora per forza $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = m$.
Utilizzando come sottomatrice di ordine 2 non singolare, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, si ottiene

$$\begin{cases} 2y = 4 + 2\alpha z \\ -\dfrac{\alpha}{2}x + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2} - \alpha z \\ z \in I\!R \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{\alpha}2 + 3z \\ y = 2 + \alpha z \\ z \in I\!R \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} + 3t \\ 2 + \alpha t \\ t \end{bmatrix} \quad t \in I\!R$$

$\boxed{\textbf{2}}$

(i) Si ricordino gli enunciati della *condizione necessaria per la convergenza* e del *criterio della radice.*
(ii) Si diano esempi di:
- serie a termini negativi, divergente;
- serie a termini di segno alterno, convergente assolutamente.

Soluzione

(i) **1 punto la condizione necessaria, 2 punti il criterio**
Si veda libro di testo *Manuale modulare di Metodi Matematici, Modulo 5,* capitolo 2.
(ii) **2 punti per ogni •**
• Qualsiasi serie geometrica $-\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, con ragione $q > 1$; oppure l'opposto della serie armonica $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$; oppure l'opposto della serie armonica generalizzata $-\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, con $\alpha < 1, \beta \in I\!R$, oppure $\alpha = 1, \beta \leq 1$; oppure ... ...
• La serie del *Tizio indeciso* (a passi *quadratici*): $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; oppure $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$; oppure $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$; oppure ... ...

$\boxed{\textbf{3}}$

Si consideri la funzione f, definita da $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-4x+3}$.
(i) Si determini l'integrale indefinito di f.
(ii) Si determini la primitiva F di f, tale che $F(2) = 1$.
(iii) **Facoltativo:** <u>Sfruttando il risultato del punto (i)</u>, si determini se esiste un punto $c \in [4, 5]$ tale che $f(c) = \log \frac{32}{9}$.

Soluzione

(i) **5 punti**
Si determina dapprima la decomposizione in fratti semplici (D.F.S.) di f:

$$\frac{3x-7}{x^2-4x+3} = \frac{3x-7}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

pertanto, in ogni intervallo $[a, b] \subset (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$, si ha:

$$\int f(x)dx = \int \frac{3x-7}{x^2-4x+3}dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-3} =$$
$$= \log\left(|x-3|(x-1)^2\right) + c \qquad (c \in I\!R)$$

(ii) **3 punti**
Imponendo la condizione $F(2) = 1$ all'insieme delle primitive di f, si ottiene

$$1 = F(2) = \left[\log\left(|x-3|(x-1)^2\right) + c\right]_{|x=2} = \log 1 + c = c$$

e quindi $c = 1$; la primitiva cercata è quindi

$$F(x) = \log\left(|x-3|(x-1)^2\right) + 1$$

(iii) **+2 punti**

Facoltativo:
Il valor medio (media integrale) di f nell'intervallo $[4,5]$ è

$$\int_4^5 \frac{3x-7}{x^2-4x+3}dx = \left[\log\left(|x-3|(x-1)^2\right)\right]_4^5 = \log(32) - \log 9 = \log\frac{32}{9}$$

la funzione f è continua nell'intervallo $[4,5]$, quindi, per il *Teorema del valor medio*, esiste $c \in [4,5]$ tale che $f(c) = \log\frac{32}{9}$.

4

Si determini il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Soluzione

7 punti
Utilizzando il criterio del rapporto, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

pertanto, la serie è convergente; essendo a termini positivi, la sua somma è positiva.