Università degli Studi di Milano-Bicocca - Facoltà di Economia
Matematica Generale Modulo B - 15 Luglio 2003

Esercizio 1

1. Dare la definizione di rango di una matrice. Enunciare il Teorema di Rouchè-Capelli.

2. (a) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e il vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, verificare che $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (b) Risolvere il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (c) Sfruttando i risultati dei punti (a) e (b), determinare tutte le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soluzione

1. Si rimanda al libro di testo.

   (a) Essendo $A\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbf{x}^*$ è effettivamente soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (b) Non c'è bisogno di applicare il teorema di Rouchè-Capelli, in quanto il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è sempre possibile. In particolare, si osserva facilmente che la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2, essendo $\det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -1$, quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni. Con semplici passaggi si ottiene:

$$\begin{cases} -x = -z \\ 2x + y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -3t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(c) Ricordando una delle proprietà dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ogni soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si può esprimere come somma di una soluzione particolare di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e di una soluzione del sistema omogeneo associato $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$,dunque:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -3t \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+1 \\ -3t+1 \\ t-2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2

1. Enunciare almeno una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè una funzione f, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sia integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

2. Provare con un esempio che la condizione enunciata al punto (1) è solo sufficiente affinchè una funzione sia Riemann-integrabile.

3. Data la funzione $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{3 - e^{-2t}}{e^{-t}} dt$, scrivere l'equazione della retta tangente a $F(x)$ nel punto $x_0 = \ln 3$.

Soluzione

1. Una condizione sufficiente, ma non necessaria per l'integrabilità secondo Riemann è la continuità in $[a, b]$; un'altra condizione è la monotonia in $[a, b]$.

2. Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$; $f(x)$ non è continua in tutto l'intervallo $[0, 1]$, in quanto non è continua nel punto $x = \frac{1}{2}$, tuttavia è Riemann-integrabile nell'intervallo $[0, 1]$.

3. La funzione integranda $f(x) = \dfrac{3 - e^{-2x}}{e^{-x}}$ è continua sull'intervallo $[1, \ \ln 3]$, quindi è integrabile in questo intervallo; per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) = \dfrac{3 - e^{-2x}}{e^{-x}}$, quindi $F'(\ln 3) = \frac{26}{3}$.

   Inoltre

$$\begin{aligned} F(\ln 3) &= \int_1^{\ln 3} \frac{3 - e^{-2x}}{e^{-x}} dx = \int_1^{\ln 3} \left(\frac{3e^{2x} - 1}{e^{2x}} e^x \right) dx = \int_1^{\ln 3} \frac{3e^{2x} - 1}{e^x} dx = \\ &= \int_1^{\ln 3} \left(3e^x - \frac{1}{e^x} \right) dx = \left[3e^x + e^{-x} \right]_1^{\ln 3} = \frac{1}{3e} \left(-9e^2 + 28e - 3 \right). \end{aligned}$$

L'equazione della retta tangente in $x_0 = \ln 3$ è quindi:

$$\begin{aligned} y - F(\ln 3) &= F'(\ln 3)(x - \ln 3) \\ y - \frac{1}{3e}\left(-9e^2 + 28e - 3\right) &= \frac{26}{3}(x - \ln 3) \end{aligned}$$

Esercizio 3

1. Dare la definizione di successione monotona decrescente/non crescente.

2. Enunciare il criterio del confronto per le serie.

3. Stabilire il carattere della seguente serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{ne^{(1/n)}}{\sqrt{n+1}}$.

Soluzione

1. Si rimanda al libro di testo.

2. Si rimanda al libro di testo.

3. Si ha, per $n \to +\infty$, $a_n = \dfrac{ne^{(1/n)}}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{n}{\sqrt{n+1}} \sim \sqrt{n}$, ed essendo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, la serie assegnata è divergente.

Università degli Studi di Milano-Bicocca Facoltà di Economia
Matematica Generale Modulo B - 15 Luglio 2003

Esercizio 1

1. Dare la definizione di matrice inversa. Enunciare una condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di una matrice.

2. (a) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e il vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, verificare che $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (b) Risolvere il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (c) Sfruttando i risultati dei punti (a) e (b), determinare tutte le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soluzione

1. Si rimanda al libro di testo.

   (a) Essendo $A\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbf{x}^*$ è effettivamente soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (b) Non c'è bisogno di applicare il teorema di Rouchè-Capelli, in quanto il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è sempre possibile. In particolare, si osserva facilmente che la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2, essendo $\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -3$, quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni. Con semplici passaggi si ottiene:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2z \\ -y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

   (c) Ricordando una delle proprietà dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ogni soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si può esprimere come somma di una soluzione particolare di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e di una soluzione del sistema omogeneo associato $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$,dunque: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} +$

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ t+2 \\ t+1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Esercizio 2

1. Enunciare almeno una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè una funzione f, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sia integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

2. Provare con un esempio che la condizione enunciata al punto (1) è solo sufficiente affinchè una funzione sia Riemann-integrabile.

3. Data la funzione $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{2 - e^{-2t}}{e^{-t}} dt$, scrivere l'equazione della retta tangente a $F(x)$ nel punto $x_0 = \ln 4$.

Soluzione

1. Una condizione sufficiente, ma non necessaria per l'integrabilità secondo Riemann è la continuità in $[a, b]$; un'altra condizione è la monotonia in $[a, b]$.

2. Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[-1, 1]$; $f(x)$ non è monotona in $[-1, 1]$, tuttavia è Riemann-integrabile.

3. La funzione integranda $f(x) = \dfrac{2 - e^{-2x}}{e^{-x}}$ è continua sull'intervallo $[1, \ \ln 4]$, quindi è integrabile in questo intervallo; per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) = \dfrac{2 - e^{-2x}}{e^{-x}}$, quindi $F'(\ln 4) = \frac{31}{4}$ e:

$$\begin{aligned} F(\ln 4) &= \int_1^{\ln 4} \frac{2 - e^{-2x}}{e^{-x}} dx = \int_1^{\ln 4} \left(\frac{2e^{2x} - 1}{e^{2x}} e^x \right) dx = \int_1^{\ln 4} \frac{2e^{2x} - 1}{e^x} dx = \\ &= \int_1^{\ln 4} \left(2e^x - \frac{1}{e^x} \right) dx = \left[2e^x + e^{-x} \right]_1^{\ln 4} = \frac{1}{4e} \left(33e - 8e^2 - 4 \right). \end{aligned}$$

L'equazione della retta tangente in $x_0 = \ln 4$ è quindi:

$$
\begin{aligned}
y - F(\ln 4) &= F'(\ln 4)(x - \ln 4) \\
y - \frac{1}{4e}\left(33e - 8e^2 - 4\right) &= \frac{31}{4}(x - \ln 4)
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

1. Dare la definizione di successione monotona decrescente/non crescente.
2. Enunciare il criterio del confronto asintotico per le serie.
3. Stabilire il carattere della seguente serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+1)\,e^{\left(1/n^2\right)}}{\sqrt{n}}$.

Soluzione

1. Si rimanda al libro di testo.
2. Si rimanda al libro di testo.
3. Si ha, per $n \to +\infty$, $a_n = \dfrac{(n+1)\,e^{\left(1/n^2\right)}}{\sqrt{n}} \sim \frac{n+1}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}$, ed essendo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, la serie assegnata è divergente.