Università degli Studi di Milano “Bicocca”

# Matematica Generale mod. B

**Esame del 9 settembre 2003**

## Esercizio 1

*ATTENZIONE: l'esercizio effettivamente somministrato all'esame era diverso da quello ora riportato (a numeratore del termine generale della serie compariva un binomio di I grado, e non un trinomio di II come quello che segue). Preferiamo tuttavia proporre il caso meno immediato visto che il procedimento risolutivo segue la medesima logica in entrambi i casi*

1. Enunciare una condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie numerica.
2. Enunciare una condizione solo sufficiente per la convergenza di una serie numerica.
3. Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2+3\alpha-1)^n}{n+1}$$
converge.
4. **(facoltativo)** In caso di convergenza della serie, calcolarne la somma.

## Soluzione

1. La condizione più ovvia è $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Ad esempio, $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
3. Osserviamo anzitutto che per i valori di $\alpha$ che annullano il trinomio a numeratore del termine generale (cioè $\alpha = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{13}\right)$) la serie è a termini identicamente nulli e quindi converge e ha somma 0. Se il trinomio vale +1 (cioè $\alpha = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{17}\right)$) la serie è definitivamente uguale alla serie armonica e quindi diverge. Se il trinomio vale $-1$ (cioè per $\alpha = -3$ e per $\alpha = 0$) la serie è a segni alterni e il termine generale è in valore assoluto decrescente, pertanto in forza del criterio di Leibniz essa converge. Per gli altri valori, applicando la condizione necessaria di cui sopra si nota che il termine generale è infinitesimo solo se
$$|\alpha^2+3\alpha-1| < 1$$
Nei casi in cui il trinomio è positivo ( cioè $\alpha < \frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{13}\right)$ o $\alpha > \frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{13}\right)$) la disequazione diviene
$$\alpha^2+3\alpha-1 < 1$$
che è soddisfatta se $\frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{17}\right) < \alpha < \frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{17}\right)$. Se il trinomio è negativo ( cioè $\frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{13}\right) < \alpha < \frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{13}\right)$) la disequazione diviene
$$-\alpha^2-3\alpha+1 < 1$$
che è soddisfatta per $\alpha < -3$ o per $\alpha > 0$. Combinando i risultati ottenuti si ottiene che la serie è convergente per
$$\frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{17}\right) < \alpha \le -3 \quad \cup \quad 0 \le \alpha < \frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{17}\right)$$
4. Ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin:
$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
convergente per $-1 \le x < 1$, basta porre $\alpha^2+3\alpha-1 = x$ e ”aggiustare” i primi termini

della serie data ottenendo, per i valori di $\alpha$ per i quali si è accertata la convergenza,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2+3\alpha-1)^n}{n+1} = \frac{1}{\alpha^2+3\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2+3\alpha-1)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+3\alpha-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha^2+3\alpha-1)^m}{m} = \frac{-\ln(2-3\alpha-\alpha^2)}{\alpha^2+3\alpha-1}$$

# Esercizio 2

1. Enunciare il teorema del valor medio (o media integrale).
2. Calcolare il valor medio sull'intervallo $[0,2]$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^{4x^2} & se \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x(x+2)} & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

3. **(facoltativo)** L'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)} dx$$

converge? In caso affermativo calcolarne il valore.

## Soluzione

1. vedi testo
2. Trattasi di funzione integrabile in $[0,2]$, pertanto il valor medio esiste e vale

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 xe^{4x^2}dx + \int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}dx\right]$$

Calcoliamo separatamente i due integrali definiti:

$$\int_0^1 xe^{4x^2}dx = \frac{1}{8}\int_0^1 e^{4x^2}(8xdx) = \frac{1}{8}\left[e^{4x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{8}(e^4-1)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x}{x+2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Pertanto la media integrale richiesta vale

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}(e^4-1) + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right]$$

3. L'integrale generalizzato esiste in quanto la funzione integranda è infinitesima di ordine 2 per $x \to +\infty$; dal risultato precedente, osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+2} = 0$$

si ottiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)}dx = \frac{1}{2}\left(0 - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln 3}{2}$$

# Esercizio 3

1. Dare la definizione di matrice inversa, ed enunciare una condizione necessaria e sufficiente per la sua esistenza.
2. Per quali valori del parametro reale $\alpha$ la seguente matrice è invertibile?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

**3.** Per quali valori del parametro reale $\alpha$ è possibile il sistema seguente?

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Soluzione

**1.** Data una matrice quadrata $M$, la sua inversa, se esiste, è la matrice $B$ tale che $MB = BM = I$. La c.n.s. per l'esistenza della matrice inversa è $\det M \neq 0$.

**2.** Sviluppando il determinante, si ottiene

$$\det A = -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = -\alpha^2(\alpha - 2) + 4(\alpha - 2) =$$
$$= (4 - \alpha^2)(\alpha - 2) = -(\alpha + 2)(\alpha - 2)^2$$

Pertanto la matrice data è invertibile solo per $\alpha \neq \pm 2$.

**3.** Per $\alpha \neq \pm 2$ il rango della matrice dei coefficienti è 3, quindi il sistema è di Cramer e ammette una e una sola soluzione. Esaminiamo i casi di singolarità. Per $\alpha = 2$ il rango della matrice $A$ è chiaramente 1 mentre quello della matrice orlata è 2: quindi il sistema è impossibile. Per $\alpha = -2$ si ha rango $A = 2$ e rango $[A|b] = 2$ (basta osservare che la colonna dei termini noti è la somma delle ultime due colonne di $A$), quindi sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Rouché–Capelli e il sistema presenta un'infinità di soluzioni.

Università degli Studi di Milano “Bicocca”

Matematica Generale mod. B

**Esame del 9 settembre 2003**

# Esercizio 1

*ATTENZIONE: l’esercizio effettivamente somministrato all’esame era diverso da quello ora riportato (a numeratore del termine generale della serie compariva un binomio di I grado, e non un trinomio di II come quello che segue). Preferiamo tuttavia proporre il caso meno immediato visto che il procedimento risolutivo segue la medesima logica in entrambi i casi*

1. Enunciare una condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie numerica.
2. Enunciare una condizione solo sufficiente per la convergenza di una serie numerica.
3. Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2 - 3\alpha + 1)^n}{n+1}$$
converge.
4. **(facoltativo)** In caso di convergenza della serie, calcolarne la somma.

## Soluzione

1. La condizione più ovvia è $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Ad esempio, $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
3. Osserviamo anzitutto che per i valori di $\alpha$ che annullano il trinomio a numeratore del termine generale (cioè $\alpha = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$) la serie è a termini identicamente nulli e quindi converge e ha somma 0. Se il trinomio vale +1 (cioè $\alpha = 0$ o $\alpha = 3$) la serie è definitivamente uguale alla serie armonica e quindi diverge. Se il trinomio vale −1 (cioè per $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$) la serie è a segni alterni e il termine generale è in valore assoluto decrescente, pertanto in forza del criterio di Leibniz essa converge. Per gli altri valori, applicando la condizione necessaria di cui sopra si nota che il termine generale è infinitesimo solo se
$$|\alpha^2 - 3\alpha + 1| < 1$$
Nei casi in cui il trinomio è positivo (cioè $\alpha < \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$ o $\alpha > \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$) la disequazione diviene
$$\alpha^2 - 3\alpha + 1 < 1$$
che è soddisfatta se $0 < \alpha < 3$. Se il trinomio è negativo (cioè $\frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) < \alpha < \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$) la disequazione diviene
$$-\alpha^2 + 3\alpha - 1 < 1$$
che è soddisfatta per $\alpha < 1$ e $\alpha > 2$. Combinando i risultati ottenuti si ottiene che la serie è convergente per
$$0 < \alpha \leq 1 \quad \cup \quad 2 \leq \alpha < 3$$
4. Ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin:
$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
convergente per $-1 \leq x < 1$, basta porre $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = x$ e ”aggiustare” i primi termini della serie data ottenendo, per i valori di $\alpha$ per i quali si è accertata la convergenza,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2 - 3\alpha + 1)^n}{n+1} = \frac{1}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2 - 3\alpha + 1)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha^2 - 3\alpha + 1)^m}{m} = \frac{-\ln(3\alpha - \alpha^2)}{\alpha^2 - 3\alpha + 1}$$

# Esercizio 2

1. Enunciare il teorema del valor medio (o media integrale).
2. Calcolare il valor medio sull'intervallo $[0,4]$ della funzione
$$f(x) = \begin{cases} xe^{2x^2} & se \quad x < 2 \\ \dfrac{1}{x(x+3)} & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$
3. **(facoltativo)** L'integrale generalizzato
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x+3)} dx$$
converge? In caso affermativo calcolarne il valore.

## Soluzione

1. vedi testo
2. Trattasi di funzione integrabile in $[0,4]$, pertanto il valor medio esiste e vale
$$\frac{1}{4}\left[\int_0^2 xe^{2x^2} dx + \int_2^4 \frac{1}{x(x+3)} dx\right]$$
Calcoliamo separatamente i due integrali definiti:
$$\int_0^2 xe^{2x^2} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x^2}(4xdx) = \frac{1}{4}\left[e^{2x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$
$$\int_2^4 \frac{1}{x(x+3)} dx = \int_2^4 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) dx = \frac{1}{3}\left[\ln\frac{x}{x+3}\right]_2^4 = \frac{1}{3}\ln\frac{10}{7}$$
Pertanto la media integrale richiesta vale
$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(e^2 - 1) + \frac{1}{3}\ln\frac{10}{7}\right]$$
3. L'integrale generalizzato esiste in quanto la funzione integranda è infinitesima di ordine 2 per $x \to +\infty$; dal risultato precedente, osservando che
$$\lim_{x \to +\infty} \ln\frac{x}{x+3} = 0$$
si ottiene
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x+3)} dx = \frac{1}{3}\left(0 - \ln\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$$

# Esercizio 3

1. Dare la definizione di matrice inversa, ed enunciare una condizione necessaria e sufficiente per la sua esistenza.
2. Per quali valori del parametro reale $\alpha$ la seguente matrice è invertibile?

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 3 & \alpha \\ 3 & \alpha & 3 \\ \alpha & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

**3.** Per quali valori del parametro reale $\alpha$ è possibile il sistema seguente?

$$\begin{bmatrix} \alpha & 3 & \alpha \\ 3 & \alpha & 3 \\ \alpha & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

## Soluzione

**1.** Data una matrice quadrata $M$, la sua inversa, se esiste, è la matrice $B$ tale che $MB = BM = I$. La c.n.s. per l'esistenza della matrice inversa è $\det M \neq 0$.

**2.** Sviluppando il determinante, si ottiene

$$\det A = -\alpha^3 + 3\alpha^2 + 9\alpha - 27 = -\alpha^2(\alpha - 3) + 9(\alpha - 3) =$$
$$= (9 - \alpha^2)(\alpha - 3) = -(\alpha + 3)(\alpha - 3)^2$$

Pertanto la matrice data è invertibile solo per $\alpha \neq \pm 3$.

**3.** Per $\alpha \neq \pm 3$ il rango della matrice dei coefficienti è 3, quindi il sistema è di Cramer e ammette una e una sola soluzione. Esaminiamo i casi di singolarità. Per $\alpha = 3$ il rango della matrice $A$ è chiaramente 1 mentre quello della matrice orlata è 2: quindi il sistema è impossibile. Per $\alpha = -3$ si ha rango $A = 2$ e rango $[A|b] = 2$ (basta osservare che la colonna dei termini noti è la somma delle ultime due colonne di $A$), quindi sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Rouché–Capelli e il sistema presenta un'infinità di soluzioni.