Università di Milano-Bicocca Facoltà di Economia

Matematica Generale Modulo B 23/09/03

Esercizio 1

1. Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche, precisando le ipotesi.
   Vedi testo
2. Stabilire il carattere della serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

   Essendo la serie a termini positivi, si può applicare il criterio del rapporto. Poiché

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} =$$

$$= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \to 2e^{-1} < 1$$

   la serie è convergente

Esercizio 2

1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
   - **a.** Enunciare una condizione necessaria, ma non sufficiente affinchè f sia Riemann-integrabile in $[a,b]$.
     Ad esempio, f limitata in $[a,b]$.
   - **b.** Enunciare una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè f sia Riemann-integrabile in $[a,b]$.
     ad esempio f continua in $[a,b]$.
2. Calcolare $\int_{-3}^{2} f(x)dx$, dove:

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{4+x^2} & se \quad x < 1 \\ \ln(x+4) & se \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

   f è continua sull'intervallo di integrazione salvo in $x = 1$ dove presenta una discontinuità di prima specie (infatti $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{5}$, $f(1) = \ln 5$), quindi è integrabile in $[-3,2]$. Si ottiene

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{1} x\sqrt{4+x^2}\,dx + \int_{1}^{2} \ln(x+4)dx$$

   Calcolo separatamente i due integrali.

$$\int_{-3}^{1} x\sqrt{4+x^2}\,dx = \int_{-3}^{1} \frac{1}{2}(4+x^2)^{1/2}(2xdx) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4+x^2)^{3/2}\right]_{-3}^{1} = \frac{1}{3}[5^{3/2} - 13^{3/2}]$$

$$\int_{1}^{2} \ln(x+4)dx = [(x+4)\ln(x+4) - (x+4)]_1^2 =$$

$$= 6\ln 6 - 6 - 5\ln 5 + 5 = \ln\left(\frac{6^6}{5^5}\right) - 1$$

   Pertanto l'integrale proposto vale

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \frac{1}{3}[5^{3/2} - 13^{3/2}] + \ln\left(\frac{6^6}{5^5}\right) - 1$$

Esercizio 3

1. Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli.
   Vedi testo.
2. Calcolare il rango della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \alpha & 5 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 5 & 5 & \alpha \end{bmatrix}$$

   al variare del parametro reale α.
   Si ha

$$\det A = 5\alpha^2 - \alpha^3$$

   Pertanto per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 5$ il rango di A vale 3. Se $\alpha = 0$ o $\alpha = 5$ esiste comunque una sottomatrice quadrata di ordine 2 non singolare, pertanto il rango di A in tali casi è 2.

3. Stabilire per quali valori del parametro reale α il sistema:

$$\begin{bmatrix} 5 & \alpha & 5 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 5 & 5 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è IMPOSSIBILE.

Visti i risultati ottenuti ai punti precedenti, il sistema è di Cramer e quindi possibile se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 5$.
Se $\alpha = 0$ la matrice orlata diviene

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha chiaramente rango 3, quindi in tal caso il sistema è impossibile.
Se invece $\alpha = 5$ la matrice orlata diviene

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2, pertanto il sistema in tal caso è possibile e presenta un'infinità di soluzioni.

Soluzioni seconda versione

Esercizio 1

1. Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche, precisando le ipotesi.
   Vedi testo
2. Stabilire il carattere della serie: $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{2}{n})^{n^2}$.

Essendo la serie a termini definitivamente positivi, si può applicare il criterio della radice. Si ottiene

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right)^n} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \to e^{-2} < 1$$

Pertanto, in forza del criterio sopra enunciato, la serie è convergente.

Esercizio 2

1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
   a. Enunciare una condizione necessaria, ma non sufficiente affinchè f sia Riemann-integrabile in $[a,b]$.
      Ad esempio, f limitata in $[a,b]$.
   b. Enunciare una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè f sia Riemann-integrabile in $[a,b]$.
      ad esempio f continua in $[a,b]$.
2. Calcolare $\int_{-2}^{3} f(x)dx$, dove:

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{3+x^2} & se \quad x < 1 \\ \ln(x+3) & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

f è continua sull'intervallo di integrazione salvo in $x = 1$ dove presenta una discontinuità di prima specie (infatti $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $f(1) = \ln 4$), quindi è integrabile in $[-2,3]$. Si ottiene

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1} x\sqrt{3+x^2}\,dx + \int_{1}^{3} \ln(x+3)dx$$

Calcolo separatamente i due integrali.

$$\int_{-2}^{1} x\sqrt{3+x^2}\,dx = \int_{-2}^{1} \frac{1}{2}(3+x^2)^{1/2}(2xdx) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(3+x^2)^{3/2}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{3}[4^{3/2} - 7^{3/2}]$$

$$\int_{1}^{3} \ln(x+3)dx = [(x+3)\ln(x+3) - (x+3)]_1^3 =$$

$$= 6\ln 6 - 6 - 4\ln 4 + 4 = \ln\left(\frac{6^6}{4^4}\right) - 2$$

Pertanto l'integrale proposto vale

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}[4^{3/2} - 7^{3/2}] + \ln\left(\frac{6^6}{4^4}\right) - 2$$

Esercizio 3

1. Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli.
   Vedi testo
2. Calcolare il rango della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 6 & \alpha & 6 \\ 6 & 6 & \alpha \end{bmatrix}$$

   al variare del parametro reale α.
   Si ha

$$\det A = \alpha^3 - 6\alpha^2$$

   Pertanto per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 6$ il rango di A vale 3. Se $\alpha = 0$ o $\alpha = 6$ esiste comunque una sottomatrice quadrata di ordine 2 non singolare, pertanto il rango di A in tali casi è 2.

3. Stabilire per quali valori del parametro reale α il sistema:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 6 & \alpha & 6 \\ 6 & 6 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è IMPOSSIBILE.

Visti i risultati ottenuti ai punti precedenti, il sistema è di Cramer e quindi possibile se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 6$.
Se $\alpha = 0$ la matrice orlata diviene

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2, quindi in tal caso il sistema è possibile e presenta un'infinità di soluzioni..

Se invece $\alpha = 6$ la matrice orlata diviene

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 3, pertanto il sistema in tal caso è impossibile.