Università degli Studi di Milano-Bicocca, Facoltà di Economia

Matematica Generale Modulo B

18 Ottobre 2003

Esercizio 1

- Dopo aver ricordato la definizione di serie numerica, dire cosa significa che una serie è *convergente / divergente / irregolare*.
- Stabilire, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{an + \ln n}{n^2 + n}$.

SOLUZIONE

Se $a \neq 0$ il termine generale della serie è asintotico a $\frac{1}{n}$ e pertanto la serie diverge.
Se invece $a = 0$ il termine generale è asintotico a $\frac{\ln n}{n^2}$ e quindi la serie converge.

Esercizio 2

- Dare la definizione di matrice inversa ed enunciare una condizione per la sua esistenza.
- Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1-a \\ a & 1 & -1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

- determinare il rango di A al variare del parametro reale a.

SOLUZIONE

Per definizione, il rango della matrice è due a meno che non si annullino ***contemporaneamente*** i determinanti delle tre sottomatrici di ordine 2:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix} = 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2;$$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1-a \\ a & -1 \end{bmatrix} = -2 - a + a^2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1-a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = 2$$

e cioè per $a = 2$. In corrispondenza di tale valore il rango è chiaramente 1

- Per $a = 3$ risolvere, se possibile, il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

SOLUZIONE

Il sistema è

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed è risolubile perché $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}[A|b] = 2$. Individuata la matrice che dà il rango (ad es. quella formata dalle prime due colonne) si considera z variabile libera, pertanto il sistema diviene

$$\begin{cases} 2x + y = -1 + 2z \\ 3x + y = 1 + z \end{cases}$$

la cui soluzione è $x = 2 - z, y = 4z - 5$.

Esercizio 3

- Sia $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definire una primitiva di f su $\mathbb{I}$.
- Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = (x-1)e^{-x}$$

SOLUZIONE

La funzione proposta ammette primitive in quanto continua su $\mathbb{R}$. Poiché

$$(x-1)e^{-x}dx = (x-1)d(-e^{-x})$$

l'integrale si può risolvere per parti ottenendo

$$\int (x-1)e^{-x}dx = [(x-1)(-e^{-x})] - \int (-e^{-x})dx =$$
$$= (-e^{-x})(x-1) - e^{-x} + c = -xe^{-x} + c$$

- Dire se l'integrale improprio (generalizzato)

$$\int_1^{+\infty} (x-1)e^{-x}dx$$

converge, e in caso affermativo calcolarne il valore.

SOLUZIONE

L'integrale improprio converge perché l'ordine di infinitesimo della funzione integranda per $x \to +\infty$ è superiore a 1. Utilizzando il risultato del punto precedente si ottiene subito che

$$\int_1^{+\infty} (x-1)e^{-x}dx = [-xe^{-x}]_1^{+\infty} = e^{-1}$$

- **(facoltativo)** Determinare la funzione integrale F della funzione $f(x) = (x-1)e^{-x}$ tale che $F(1) = -e^{-1}$.

SOLUZIONE

Dalla definizione è noto che la funzione integrale di parametro k (cioè tale che $F_k(k) = 0$) vale

$$F_k(x) = \int_k^x (t-1)e^{-t}dt = [-te^{-t}]_k^x = -xe^{-x} + ke^{-k}$$

Imponendo che $F(1) = -e^{-1}$ si ottiene $-e^{-1} + ke^{-k} = -e^{-1}$ da cui banalmente $k = 0$. Si conclude che la funzione integrale richiesta è $F_0(x) = -xe^{-x}$.