Università degli Studi di Milano / Bicocca – Facoltà di Economia
MATEMATICA GENERALE Modulo B Ecocomm A-D (Prof.ssa G.Carcano)
Prova scritta del 14 gennaio 2004 – SOLUZIONI

1. Quale, delle seguenti, è la serie di MacLaurin della funzione $f(x) = e^x$?

$\boxed{a}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ $\boxed{b}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ ■ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\boxed{d}$ nessuna delle altre

2. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n}$ $\boxed{a}$ converge ed ha per somma $\frac{5}{6}$ $\boxed{b}$ converge ed ha per somma $\frac{5}{3}$ ■ converge ed ha per somma $\frac{10}{3}$ $\boxed{d}$ nessuna delle altre tre affermazioni è corretta

La serie converge perché è a termini positivi ed il termine generale è infinitesimo di ordine superiore, p.e., a $\frac{1}{n^2}$. La sua somma è

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{5^n} = 2\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = 2\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

3.

$\displaystyle\int_1^4 \ln x dx =$ $\boxed{a}$ $3\ln 3 - 3$ $\boxed{b}$ $2\ln 2 - 2$ $\boxed{c}$ $\dfrac{\ln 4 - 1}{4}$ ■ $4\ln 4 - 3$

$$\int_1^4 \ln x dx = [x\ln x - x]_1^4 = 4\ln 4 - 4 + 1 = 4\ln 4 - 3$$

4. Sia $f : [a, b] \to I\!R$; quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{a}$ se f è Riemann-integrabile, allora è continua
■ se f è continua, allora è Riemann-integrabile
$\boxed{c}$ se f è Riemann-integrabile, allora è derivabile
$\boxed{d}$ nessuna delle altre

Si veda il libro di testo.

5. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$

$\boxed{a}$ diverge a $+\infty$ $\boxed{b}$ diverge a $-\infty$ ■ converge $\boxed{d}$ è oscillante

(*attenzione: NON calcolate l'integrale, ma utilizzate i criteri*)
La funzione integranda è positiva e, per $x \to +\infty$, infinitesima di ordine 2 rispetto a $\frac{1}{x}$; l'integrale improprio è quindi convergente.

6. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 3$; allora vale ■ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = 3$ $\boxed{b}$ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ $\boxed{c}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$ $\boxed{d}$ nessuna delle altre tre affermazioni è corretta

È la definizione di *serie convergente con somma S* (si veda il libro di testo).

7. Il valor medio della funzione $f(x) = xe^{x^2}$, nell'intervallo $[0, 2]$, è

$\boxed{a}$ $\dfrac{e^4-1}{2}$ ■ $\dfrac{e^4-1}{4}$ $\boxed{c}$ non esiste $\boxed{d}$ $e^4 - 1$

$$\textit{valor medio} \; = \frac{\int_0^2 x e^{x^2} dx}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$

8. Si consideri il generico sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ matrice di tipo $m \times n$, $\mathbf{x} \in I\!R^n$, $\mathbf{b} \in I\!R^m$.

- Si riportino le seguenti definizioni: **(4 punti)**
  - *sistema possibile* (o *consistente*);
  - *sistema impossibile* (o *inconsistente*);
  - *sistema determinato*;
  - *sistema indeterminato.*

  Per le definizioni, si veda il libro di testo
- Si determini se il seguente sistema è possibile o impossibile; se è possibile, lo si risolva. **(8 punti)**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \text{ove} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 9 & -2 & 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = 0$$

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2 \qquad \text{perché} \;\; \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 \qquad \text{perché} \;\; \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & -2 & 23 \end{bmatrix} = 0$$

per il teorema di Rouché Capelli, il sistema è quindi possibile e indeterminato (una variabile libera, perché $n - r = 3 - 2 = 1$)

$$\begin{cases} z = t \in I\!R \\ x + 2y = 2t - 1 \\ 3x + y = -3t + 5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5}t + \frac{11}{5} \\ \frac{9}{5}t - \frac{8}{5} \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$