MATEMATICA GENERALE MOD. B – 30/1/2004

1. a) Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo reale, dare la definizione di primitiva di
f in I ed enunciare una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè f ammetta

primitiva in I .
b) Calcolare $\int_0^4 f(x)dx$ dove

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & se\ x \le 1 \\ x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} & se\ x > 1 \end{cases} .$$

c) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} .$$

d) (*Facoltativo*) Stabilire se è convergente l 'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}\, dx.$$

Soluzione:
a) v. libro di testo
b) $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx + \int_1^4 (x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = [-e^{-x}]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + 2\sqrt{x}\right]_1^4$

$$= \left(-e^{-1} + 1\right) + \left(\frac{64}{3} + 4 - \tfrac{1}{3} - 2\right) = -\frac{1}{e} + 24$$

c) La totalità delle primitive di f in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ si può calcolare con la sostituzione

$z = -\dfrac{1}{x}$, $z\,' = \dfrac{1}{x^2}$, $dz = \dfrac{1}{x^2}\, dx$ ottenendo :

$$\int \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}\, dx = \int e^z dz = (e^z) + c = e^{-\frac{1}{x}} + c \ , \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi una primitiva è per esempio $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}\, dx = \lim\limits_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}\, dx = \lim\limits_{M\to+\infty} \left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_1^M$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(e^{-\frac{1}{M}} - e^{-1}\right) = 1 - \frac{1}{e}$$

convergente.

Oppure, applicando il criterio del confronto asintotico si ottiene:

$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \sim \frac{1}{x^2}$ *per* $x \to +\infty$ e quindi l 'integrale improprio è convergente.

2. a) Enunciare il criterio del rapporto per serie numeriche a termini positivi.

b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}.$$

c) Stabilire se è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{\,n}}\ .$$

e in caso affermativo calcolarne la somma.

Soluzione:

a) v. libro di testo

b) Si può applicare il criterio del rapporto ottenendo :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!}\ \frac{n!}{n^2+1} = \frac{(n^2+2n+2)\ n!}{(n+1)\ n!\ (n^2+1)} \sim \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad per\ n\to\infty$$

quindi la serie proposta converge.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{\,n}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}$ quindi convergente con

somma $s = 2\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 6.$

3. a) Dare la definizione di rango di una matrice.

b) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & -k & 2 \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix} \qquad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

i. calcolarne il rango al variare di k ;

ii. per $k = 0$ discutere e risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

,

con $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

Soluzione:

a) v. libro di testo

b) $\det A = k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3)$. Se $k \neq 2, 3$ allora $rgA = 3$. Se $k = 2$ o $k = 3$ allora

$rgA = 2$ perché esiste una sottomatrice quadrata di ordine 2 con determinante diverso da zero,

$$\text{per esempio} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Se $k = 0$, $rgA = 3$ e quindi il sistema è determinato. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2z = 2 \\ x + 3z = 3 \end{cases} \qquad \text{e la soluzione è} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$