Università degli Studi di Milano / Bicocca – Facoltà di Economia
MATEMATICA GENERALE Modulo B Ecocomm A-D (Prof.ssa G.Carcano)
Prova scritta del 4 febbraio 2004 – SOLUZIONI

---

1. Quale, delle seguenti, è la serie di MacLaurin della funzione $f(x) = \ln(1+x)$?

$\boxed{a}$ nessuna delle altre $\blacksquare$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $\boxed{c}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n}$ $\boxed{d}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$

Soluz.: vedi materiale didattico

2. Se la funzione F, definita da $F(x) = x^2 + e^x + 1$ è una primitiva della funzione f, allora vale

$\boxed{a}$ $f(x) = \dfrac{x^3}{3}+e^x+x+1$ $\boxed{b}$ $f(x) = \dfrac{x^3}{3}+e^x$ $\boxed{c}$ $f(x) = \dfrac{x^3}{3}+e^x+x+c$ $(c \in I\!R)$ $\blacksquare$ $f(x) = 2x+e^x$

Soluz.: per definizione di *primitiva*, si ha $f(x) = F'(x)$, quindi

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2+e^x+1) = 2x+e^x \quad \boxed{d}$$

3. Sia $I = \int_0^4 f(x)dx$. Allora vale $\displaystyle\int_0^1 f(4x)dx =$ $\boxed{a}$ $8I$ $\blacksquare$ $\dfrac{I}{4}$ $\boxed{c}$ $4I$ $\boxed{d}$ I

Soluz.: con la sostituzione $4x = t$, si ottiene

$$\int_0^1 f(4x)dx = \int_0^4 f(t)\frac{dt}{4} = \frac{I}{4} \quad \boxed{b}$$

4. L'operazione "prodotto di matrici di ordine $(m \times 2)$"

$\blacksquare$ si può fare solo se $m = 2$
$\boxed{b}$ non si può fare, per nessun m
$\boxed{c}$ gode della proprietà commutativa, per ogni m
$\boxed{d}$ gode della proprietà commutativa solo se $m = 2$

Soluz.: vedi materiale didattico

5. Il complemento algebrico dell'elemento a_{23} della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ è

$\blacksquare$ 2 $\boxed{b}$ -2 $\boxed{c}$ -4 $\boxed{d}$ 4

Soluz.: dalla formula generale del *complemento algebrico dell'elemento* a_{ij} (vedi materiale didattico), si ha

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\text{Det}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad \boxed{a}$$

6. Sia $\mathbf{A}$ matrice di ordine $(m \times n)$ e sia $\text{r}(\mathbf{A}) = \text{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$; allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $\boxed{a}$ ha infinite soluzioni se e solo se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ $\blacksquare$ ha sempre almeno una soluzione $\boxed{c}$ ha sempre infinite soluzioni $\boxed{d}$ ha sempre una e una sola soluzione

Soluz.: vedi materiale didattico

7. Il valor medio della funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, nell'intervallo $[0,2]$, è

$\boxed{a}$ $\sqrt{5}$ $\boxed{b}$ $1-\sqrt{5}$ $\boxed{c}$ non esiste ■ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Soluz.:

$$\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \boxed{d}$$

8.

- Si riportino le seguenti definizioni e, per ognuna, si dia un esempio: **(6 punti)**
  - *serie numerica convergente*;
  - *serie numerica divergente*;
  - *serie numerica oscillante o indeterminata*;

  Soluz.: vedi materiale didattico

- Si determini il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n}{n^2}$, in dipendenza dal parametro $k \geq 0$ **(6 punti)**

  Soluz.:
  Per $k = 0$ la serie ha tutti i termini nulli e quindi è convergente con somma zero.
  Per $k > 0$ la serie ha i termini positivi e si possono utilizzare i criteri del rapporto e/o della radice:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{k^n} = \frac{k}{(1+\frac{1}{n})^2} \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} k^-$$

  quindi:
  se $k > 1$ la serie diverge a $+\infty$,
  se $k < 1$ la serie è convergente, con somma positiva,
  se $k = 1$, il criterio non dà risposta, ma, sostituendo $k = 1$, si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, convergente.