Università di Milano Bicocca - Facoltà di Economia

Esame di Matematica Generale modulo B

13 febbraio 2004

Esercizio 1

1. (a) Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che $\det A = 2$ e $\det B = 5$. Calcolare il determinante di AB^{-1}.

   (b) Sia A una matrice quadrata di ordine n; stabilire se l'invertibilità di A è condizione necessaria affinchè il sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammetta la soluzione nulla.

   (c) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & k-1 \\ k & k-6 & 6 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$:

      i. calcolare il rango di A al variare del parametro reale k;

      ii. discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

      iii. per $k = 1$ e $k = 3$ determinare tutte le soluzioni del sistema.

Soluzione

1. (a) Applicando il teorema di Binet si ottiene:

$$\det\left(AB^{-1}\right) = (\det A)\left(\det B^{-1}\right) = \frac{\det A}{\det B} = \frac{2}{5}.$$

   (b) Il sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette sempre la soluzione nulla, indipendentemente dal fatto che A sia invertibile; pertanto l'invertibilità non è condizione necessaria. Ad esempio scelta $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tuttavia A non è invertibile, essendo $\det A = 0$.

      i. Scegliendo la sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k & k-6 \end{bmatrix}$, il cui determinante è $2k - 6$, abbiamo che $r(A) = 2$ per $k \neq 3$; per $k = 3$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$; tutte le sottomatrici 2×2 di A sono singolari, quindi $r(A) = 1$.

      ii. Il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, in quanto sistema omogeneo, è sempre risolubile; in particolare se $k \neq 3$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni; se $k = 3$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni.

iii. Se $k=1$: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ x-5y+6z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\frac{2}{3}\alpha \end{array}\right. ,\alpha\in\mathbb{R}$$

Se $k=3$: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x-y+2z=0 \\ 3x-3y+6z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\alpha-2\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right. ,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Esercizio 2

1. (a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
   (b) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

   $$F(x)=\int_0^x \ln(3+t)\,dt$$

   nel punto $x=1$.
   (c) Calcolare il seguente integrale improprio: $\int_{-\infty}^0 e^{5x}dx$.

Soluzione

1. (a) Si rimanda al libro di testo.
   (b) La funzione integranda $f(x)=\ln(3+x)$ è continua in $[0,1]$, quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $F'(x)=f(x)=\ln(3+x)$; in particolare $F'(1)=\ln 4$;

   $$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 \ln(3+t)\,dt = [t\ln(t+3)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{t+3}dt = \\ &= [t\ln(t+3)]_0^1 - \int_0^1 \left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt = \\ &= [t\ln(t+3) - t + 3\ln|3+t|]_0^1 = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1 = \\ &= \ln\frac{4^4}{3^3} - 1 = \ln\left(\frac{256}{27}\right) - 1. \end{aligned}$$

   L'equazione della retta tangente a $F(x)$ in $x=1$ è:

   $$y-F(1)=F'(1)(x-1) \Longrightarrow y-\ln\left(\frac{256}{27}\right)+1=\ln 4\,(x-1)$$

(c) $\int_k^0 e^{5x}dx = \left[\frac{1}{5}e^{5x}\right]_k^0 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{5k}$; $\lim_{k\to -\infty}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{5k}\right) = \frac{1}{5}$.

Esercizio 3

1. (a) Enunciare una condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie numerica e giustificare con un controesempio perchè non è sufficiente.

   (b) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.

   (c) Stabilire il carattere delle seguenti serie:

      i. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{n^2}}$;

      ii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{\ln n + e^{-n}}{2\ln n + 1}\right)^n$.

Soluzione

1. (a) Data una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, condizione necessaria affinché la serie sia convergente è che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$; tale condizione non è sufficiente: considerata ad esempio la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ tuttavia la serie è divergente.

   (b) Si rimanda al libro di testo.

      i. La serie è a segno costante, quindi è regolare; essendo $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n^2}} = 1$, la serie non può essere convergente, di conseguenza diverge.

      ii. Applicando il criterio della radice $n-ma$: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{\ln n + e^{-n}}{2\ln n + 1}\right)^n} =$ $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\ln n + e^{-n}}{2\ln n + 1}\right) = \frac{1}{2} < 1$, quindi la serie converge.