

## Definizioni

Quando un testo contiene termini tecnici risulta indispensabile che questi vengano preventivamente definiti in modo da sciogliere ogni dubbio sul loro significato. Tale esigenza è resa qui ancor più impellente dall'incompetenza dell'autore che, a fronte di concetti ai quali attribuire un nome, ha preferito usare il suo buon senso per inventarli piuttosto che trascorrere del gran tempo studiando il materiale pubblicato alla ricerca di una terminologia già in uso.

A sua discolpa il fatto che da una analisi superficiale è emersa l'assenza di una terminologia standard consolidata.

Per le definizioni di termini matematici, che qui si daranno per acquisite (quali "matrice", "sottomatrice", "matrice a blocchi", "matrice diagonale", "righe", "colonne", "blocchi", "permutazioni", etc.), si rimanda a testi specifici.

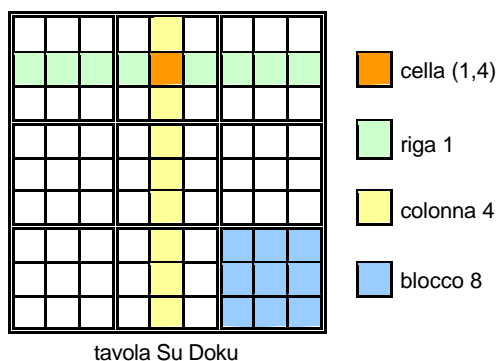
## Tavola Su Doku

La *tavola Su Doku* o, più semplicemente, *tavola* è una matrice quadrata di ordine  $(n \times n)$ , ovvero una matrice costituita da  $(n \times n)$  righe e  $(n \times n)$  colonne, suddivisa in  $(n \times n)$  blocchi quadrati di ordine  $n$ .

Qui verrà trattato solo il caso  $n = 3$  che dà luogo a tavole  $9 \times 9$  costituite quindi 9 righe, 9 colonne e, conseguentemente, da 9 blocchi di ordine 3 per un totale di 81 elementi.

Per convenzione, come indici di riga, di colonna e di blocco verranno utilizzati i primi interi da 0 a 8. Ogni cella è pertanto individuata da una coppia ordinata di indici il primo dei quali rappresenta l'indice di riga e il secondo l'indice di colonna. Ad esempio la cella in alto a sinistra, ovvero quella situata all'incrocio tra la prima riga e la prima colonna, sarà individuata dalla coppia  $(0,0)$ .

Comunemente la tavola viene chiamata *griglia*, le sue caselle *celle* e il contenuto di una cella *elemento*.



## Celle esposte

Una cella è detta *esposta* se contiene esattamente un numero.

## Su Doku valido

Il Su Doku valido è una tavola che soddisfa due condizioni:

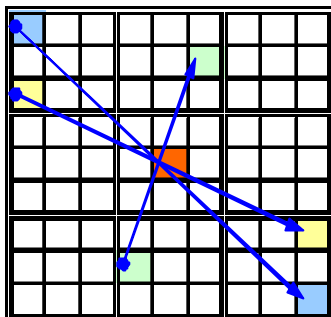
1. tutte le celle sono esposte;
2. ogni riga, ogni colonna e ogni blocco deve contenere tutti i numeri da 1 a 9 nessuno escluso. Poiché una riga è costituita da nove celle, in un Su Doku valido ogni riga conterrà esattamente un 1, un 2 e così via sino al 9 (e altrettanto dicasi per le colonne e i blocchi).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

esempio di Su Doku valido

## Problema

è una tavola Su Doku riempita solo parzialmente ovvero contenente solo alcune celle esposte. I numeri contenuti nelle celle esposte sono i dati iniziali del problema. Per convenzione dell'inventore del gioco, le celle esposte non possono essere posizionate a caso nella tavola ma devono rispettare la simmetria centrale ovvero se la cella  $(i,j)$  è esposta deve esserlo anche la cella  $(8-i,8-j)$ .



simmetria centrale

Inoltre, per essere considerato tale, il problema deve ammettere come soluzione uno ed un solo Su Doku valido.

Tavole parzialmente riempite il cui completamento non è un Su Doku valido o che possono essere completate dando luogo a più di un unico Su Doku valido non sono considerate problemi (ad esempio la tavola "facile" pubblicata su Il Giornale del 30 luglio 2005 non è un problema Su Doku perchè ammette come completamento 3 distinti Su Doku validi).

## Numero Su Doku

È il numero che la cella deve contenere per risolvere il problema. In altri termini è il numero giusto al posto giusto.

## Candidato

Un candidato è un possibile numero Su Doku ovvero è un numero che non è stato ancora escluso possa essere il numero Su Doku per una determinata cella.

# Metodologia di risoluzione

## Esistenza e unicità della soluzione

Dato un qualsiasi problema, il classico interrogativo del matematico è: "esisterà una sola soluzione?"

Qui tale domanda diventa: "Dato un problema Su Doku, esiste un unico Su Doku valido che lo risolve?"

Alla luce dell'impegno che la risoluzione di un problema può richiedere, la domanda risulta sensata ma la risposta è assai deludente: al momento non si conosce un metodo per verificare a priori se un problema ammette una, nessuna o più d'una soluzione. L'unico modo consiste nel tentare di risolvere il problema e verificare a posteriori se la risoluzione ha condotto ad uno, a nessuno o a più d'un Su Doku valido. In realtà è più corretto dire che l'autore di questo manuale non è a conoscenza di un metodo di verifica e pertanto una smentita sarà a lui estremamente gradita.

## Risoluzione per riduzione

Il metodo di riduzione adottato è quello più diffuso e consiste nel riempire ogni cella vuota con tutti i possibili candidati (ovvero, inizialmente, tutti i numeri da 1 a 9) procedendo poi alla loro graduale cancellazione attraverso l'applicazione di alcune regole di seguito esposte. Il metodo è stato qui chiamato di riduzione poiché ad ogni passaggio si riduce il numero di candidati contenuti nelle celle della tavola.

Se non si commettono errori, il risultato dell'applicazione ripetuta e metodica delle regole conduce all'unico Su Doku valido che risolve un dato problema.

Poiché ogni cella vuota contiene 9 candidati, il numero di candidati inizialmente presenti in una tavola con  $n$  celle esposte (considerando il numero Su Doku presente in una cella esposta al pari di un candidato) è esattamente  $9(81-n)+n$  e poiché un Su Doku valido contiene 81 numeri ciò significa che è necessario cancellare  $8(81-n)$  candidati per arrivare alla soluzione.

## Il sistema di regole

Le regole adottate dal programma sono tutte deterministiche ovvero nulla è lasciato al caso. Tuttavia la regola chiamata Guess si distingue dalle altre. Infatti ogni regola tranne il Guess permette di valutare la sua applicabilità prima della sua applicazione. Di converso per verificare l'applicabilità della regola Guess si deve applicare la regola e proseguire nella risoluzione del problema sino a che si arriva alla soluzione o ad una configurazione assurda cioè ad un Su Doku non valido.

I due diversi approcci e la mancanza di eleganza della regola Guess possono essere chiariti da un semplice esempio.

Si immagini di dover raggiungere una certa località seguendo un percorso costellato di bivi e deviazioni. Verificare l'applicabilità della regola prima della sua applicazione equivale a verificare quale sia la strada giusta prima di percorrerla. Questo è ciò che solitamente facciamo: arriviamo ad un bivio, leggiamo la segnaletica per individuare la strada che ci condurrà a destinazione e dopo averla individuata la percorriamo. In tale esempio il metodo Guess corrisponde invece al percorrere sistematicamente tutte le strade che dipartono da un bivio sino a che non si arriva o a destinazione o a un posto sbagliato (nel qual caso si deve ritornare al bivio e provare un'altra strada).

Purtroppo, per quanto poco elegante, la regola Guess funziona sempre e applicata sistematicamente è in grado di garantire da sola la risoluzione di qualsiasi problema. Viceversa le rimanenti regole, senza la regola Guess non sono in grado di fare altrettanto. In altri termini vi sono (numerosi) problemi che l'insieme di regole qui implementate non è in grado di risolvere senza l'ausilio della regola Guess.

Di seguito sono riportate le regole implementate nel programma. Di ogni regola, oltre alla descrizione, viene fornito un esempio costituito da due griglie rappresentanti lo stato della tavola prima (a sinistra) e dopo (a destra) l'applicazione della regola. Nella tavola a sinistra vengono evidenziate in giallo le celle che è necessario analizzare per determinare l'applicabilità della regola e i candidati coinvolti sono colorati di rosso. Nella tavola a sinistra vengono evidenziate in rosso le celle che subiscono delle riduzioni in seguito all'applicazione della regola. In entrambi i casi, le celle vuote sono ininfluenti per la regola in esame. Gli esempi sono stati costruiti ponendo attenzione sulle regole da esemplificare e non sull'effettiva validità della tavola.

## Regola 1

Poiché in un Su Doku valido nessuna cella è vuota (condizione 1), se durante la risoluzione una cella rimane con un unico candidato, questi non può che essere il numero Su Doku di quella cella e poiché ogni riga, ogni colonna e ogni blocco di un Su Doku valido deve contenere un numero (in particolare il nuovo numero Su Doku appena individuato) una sola volta (condizione 2) quel candidato deve essere cancellato dalla rosa di candidati di ognuna delle rimanenti celle sia della riga che della colonna che del blocco al quali la cella in esame appartiene.

						345		
						468		
						19		
						169		
						456		
						1458		
						129	137	78
178	3678	134	89	278	1278	156	1	389
						24	1259	1469

regola 1

						345		
						468		
						9		
						69		
						456		
						458		
						29	37	78
78	3678	34	89	278	278	56	1	389
						24	259	469

Si noti che la verifica di applicabilità della regola 1 coinvolge una sola cella alla volta: è infatti sufficiente contare il numero di candidati presenti in una cella per stabilire se la regola può essere applicata oppure no.

La regola, ovviamente, si applica anche alle colonne e ai blocchi.

	4								
	56								
	78								
	689								
	12								
	47								
	23								
	13								
	9								

La regola può essere applicata anche alle colonne e ai blocchi.

			45	57	39			
			1	58	68			
			78	467	34			

pagina 4 di 8

Nell'esempio seguente, i numeri 1 e 2 compaiono tra i candidati di esattamente due tra le celle del blocco 1 quindi, in tali celle, possono essere cancellati tutti i candidati ad esclusione, appunto, dell'1 e del 2.

			45	57	39		
			12	349	58	68	
			1278	467	34		

regola 1b

			45	57	39		
			12	58	68		
			12	467	34		

### Regola 3

Questa regola coinvolge sempre tre blocchi allineati in riga o in colonna. Si tratta di individuare un numero che, all'interno di un blocco compaia su una sola tra le tre righe (colonne) del blocco. Poichè il blocco deve contenere quel numero esattamente una volta, sicuramente dovrà essere consolidato da qualche parte sulla riga. Dunque nessun'altra cella della riga (colonna) potrà contenerlo e pertanto è possibile cancellare tale numero dalle rimanenti celle della medesima riga (colonna).

123	17	146	69	15	1789	14	127	38
15	145	78	128	15	367	78	45	23
456	16	589	134	167	13	49	36	256

regola 3

23	7	46	69	5	789	14	127	38
15	145	78	128	15	367	78	45	23
456	16	589	134	167	13	49	36	256

### Regola 3b

Se in una riga (colonna) un candidato compare solo tra le celle di un blocco allora, pur non conoscendo l'esatta posizione, sapremo che, in virtù della condizione 2, il candidato verrà consolidato in una delle tre celle. E poichè le tre celle appartengono al medesimo blocco, avremo la certezza che il numero non potrà essere tra i candidati delle residue sei celle del blocco pertanto da queste potrà essere cancellato.

						345	367	123
						389	28	357
1	2	4	5	6	7	389	389	389

regola 3b

						45	67	12
						89	28	57
1	2	4	5	6	7	389	389	389

La regola ha un'enunciazione equivalente che palesa la sua parentela con la regola precedente. Infatti se in una riga un candidato compare solo tra le tre celle di un blocco vuol dire che negli altri due blocchi il candidato compare solo nelle altre due righe. Questa enunciazione, però, oltre ad essere più complicata da descrivere è anche più complessa da implementare infatti mentre nella prima versione è sufficiente esplorare una riga (colonna) per verificare l'applicabilità della regola, nella seconda versione è necessario esplorare due blocchi.



2	1	4	3	7	8	6	9	5
9		3	4	16	15	8	7	2
6	8	5		9	2	1	3	4
5	3	9	1	2	6	4	8	7
8		6	7	4	39	5	2	13
4	7	2	8	5	39	39	6	13
3	2	7	56	18	15		4	9
1	4	8	9	3	7	2	5	6
	6		2		4	37	1	8

Le celle vuote (colorate in rosso) evidenziano la scelta errata: decisamente il candidato 1 non era quello giusto infatti, ripristinando la configurazione prima del Guess e riprovando con il candidato 9 si arriva alla soluzione.

## Il programma

### Accorgimenti in fase di apertura del programma

Il foglio di lavoro contiene delle macro che dovranno essere attivate in fase di apertura.

L'impostazione di default di Excel prevede che le macro contenute in un foglio di lavoro vengano automaticamente disattivate (e ciò per evitare che qualche virus ci impasti il computer). Sarà pertanto necessario abbassare di un grado il livello di sicurezza (dal menù Strumenti>Macro>Protezione) in modo che, all'apertura di fogli contenenti macro, Excel chieda l'autorizzazione a procedere anziché decidere per la disattivazione automatica.

### Struttura del file

Nella cartella SudokuSolver.xls trovate due fogli di lavoro.

Il primo, denominato "Archivio", contiene qualche problema con relativa soluzione.

Il secondo, denominato "Analisi", è il foglio deputato alla risoluzione dei problemi.

### Come iniziare

Selezionate il foglio di Analisi e nel riquadro "Problema" inserite il problema che volete risolvere. Tale riquadro serve solo per memorizzare il problema corrente nel caso per qualche motivo vogliate ricominciare da capo la risoluzione.

Come problema potete inserire quello che vi pare tanto, prima di iniziare la risoluzione, il programma verifica che il problema inserito sia consistente.

Ora (e ogni volta che vorrete ricominciare da capo) premete il bottone "Carica problema".

I dati verranno controllati e trasferiti nel riquadro denominato "Tavola Su Doku" e le celle vuote verranno riempite con tutti e nove i candidati.

### Esistenza e unicità della soluzione

Nel foglio è stato inserito il bottone "Esistenza e unicità". L'idea iniziale era quella di verificare a priori l'esistenza e l'unicità della soluzione ma, al momento, l'unico metodo di verifica noto consiste nel tentare di risolvere il problema e fornirne una caratterizzazione a posteriori. In ragione di ciò il bottone è lì solo per bellezza.

### Risoluzione

A questo punto avete due possibilità: premere il bottone "Risolvi!" e lasciare che sia il programma a scegliere la strategia risolutiva oppure premere a vostro gusto i bottoni delle singole regole.

Nel primo caso il programma inizierà ad applicare le regole implementate seguendo la sua strategia sino alla soluzione o sino ad un "punto morto" che richiede l'applicazione manuale di un Guess.

Nel secondo caso il programma applicherà la regola scelta dal giocatore sino a che essa avrà efficacia. Sarà quindi onere del giocatore scegliere la sequenza di applicazione delle regole.

Se una regola non sortisse alcun risultato, il programma lo segnalerà con un messaggio.

### Guess

In ogni momento durante la risoluzione manuale o ad un punto morto durante la risoluzione automatica, sarà possibile effettuare un Guess.

A tal fine il giocatore può modificare a suo piacimento la tavola semplicemente intervenendo manualmente nelle celle del riquadro Tavola Su Doku.

Per acquisire le modifiche manuali bisognerà premere il bottone Guess.

Poiché in caso di scelta fallimentare il programma deve essere in grado di ripristinare la configurazione originale, nel caso sia già in corso un Guess, il programma segnalerà con un messaggio che, se si prosegue, la configurazione originale verrà persa e sostituita da quella in essere al momento del secondo Guess.

Ciò significa semplicemente che, se fate due tentativi consecutivi il primo dei quali errato, non sarà possibile tornare indietro e dovrete quindi ricominciare da capo la risoluzione.

Durante un Guess si attivano i due bottoni "Ripristina" e "Consolida" che consentono di ripristinare la configurazione della tavola al momento del Guess o di confermare il risultato raggiunto come valido.

Sia durante un Guess che dopo il suo consolidamento è possibile proseguire tanto con la risoluzione manuale che con quella automatica.

Ovviamente, se un Guess conduce direttamente alla soluzione, non avrà alcun senso effettuare il consolidamento.